

Métodos Numéricos (2011)

Guía de problemas N° 4

Problema 1: Demostrar que si f es un polinomio de grado menor o igual que n entonces el polinomio de grado menor o igual que n que interpola a f en $x_0, x_1, \dots, x_n$ es f .

Problema 2: Considere los siguientes conjuntos de datos

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline x & -1 & 0 & 2 & 3 \\ \hline y & -1 & 3 & 11 & 27 \\ \hline \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & -3 & 1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

- Calcular el polinomio interpolante $p(x)$ de grado menor o igual que 3, en la forma de Lagrange.
- Construir las tablas de diferencias divididas y construir los polinomios interpolantes.
- Agregar a las tablas el punto $x = 4, y = 1$ y actualizar las tablas de diferencias divididas para recalculer los polinomios interpolantes.

Problema 3: Un Spline lineal puede pensarse como una sucesión de polinomios interpolantes de grado 1, entre nodo y nodo, “empalmados” en forma continua. Suponga que se particiona el intervalo $[1, 2]$ en n subintervalos iguales de longitud $h = 1/n$, y que se fabrica el spline lineal usando como nodos a los extremos de los sub-intervalos así generados. ¿Cuál es el mínimo valor de n que garantiza que la spline lineal aproxima a la función interpolada, $\sqrt{x}$, con siete decimales correctos?

Problema 4: Sea $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, y $f(x) = 2^x$. Sea P_n un polinomio de grado n que interpola a f en $n + 1$ puntos distintos cualesquiera de dicho intervalo. Demostrar que para todo $x \in [0, 5]$,

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{32 \times 5^{n+1}}{(n+1)}.$$

Problema 5: Mostrar que la spline lineal $S(x)$ que interpola en los nodos $x_0, \dots, x_n$ es la función que minimiza

$$\int_{x_0}^{x_n} (g'(x))^2 dx \quad (1)$$

entre todas las funciones g tales que $g(x_i) = f_i, i = 0, 1, \dots, n$ y tal que la integral (1) es acotada.

Problema 6: Calcular una aproximación de $f(2,5)$ interpolando los datos usando una spline cúbica natural que interpola los valores $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, f_1 = 0, f_2 = 3, f_3 = 4, f_4 = 4$.

Problema 7:

- Determinar valores de α, β , y γ para que S sea una función spline cúbica, siendo

$$S(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + \gamma x, & 0 \leq x \leq 1, \\ -\alpha x^3 + \beta x^2 - 5\alpha x + 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

- con los valores de α, β, γ del ítem anterior, decidir si S interpola a la función $f(x) = 2^x + 0,5x^2 - 0,5x - 1,0, 0 \leq x \leq 2$, respecto de la partición $\{0, 1, 2\}$.
- Graficar simultáneamente f y S en el intervalo $[0, 2]$.