

## Métodos Numéricos (2011)

### Guía de problemas N° 6

**Problema 1:** Considere la aproximación discreta a la derivada de  $f(x)$  dada por la derivada del polinomio interpolatorio en forma de Lagrange:

$$f'(x_i) \approx \sum_{j=0}^n f(x_j) \ell'_i(x_j) \quad (1)$$

Muestre que (1) se reduce, para  $n = 3$  y en  $x = x_1$  a la aproximación de diferencias finitas “centrada”  $D_0 f(x_1)$ .

**Problema 2:** Probar que  $D_+$  y  $D_-$  conmutan.

**Problema 3:** Probar que la “regla del trapecio” efectivamente calcula el área de un trapecio con base en las abscisas y vértices en  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$ .

**Problema 4:** Demuestre que la “regla de Simpson” efectivamente integra exactamente todos los polinomios de grado menor o igual a 3.

**Problema 5:** Mostrar que el error de la regla de Simpson es

$$-\frac{1}{90}(b-a)^5 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

**Problema 6:** La función  $f(x)$ , suave por pedazos, se define en el intervalo  $[0, 1]$  como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Calcule los resultados de aplicar las siguientes reglas para hallar  $\int_0^1 f(x)dx$ :

- a) La regla del trapecio sobre el intervalo  $[0, 1]$ .
- b) La regla del trapecio, primero sobre el intervalo  $[0, \frac{1}{2}]$  y luego sobre  $[\frac{1}{2}, 1]$ .
- c) La regla de Simpson sobre el intervalo  $[0, 1]$ .
- d) La regla del trapecio corregida sobre el intervalo  $[0, 1]$ .

¿Qué regla integra con menor error?

**Nota:** La regla del trapecio corregida es

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) + \frac{(b-a)^2}{12} (f'(a) - f'(b)).$$

**Problema 7:** Probar que la “regla del punto medio” integra exactamente polinomios de grado menor o igual que 1 y explique por qué la regla del punto medio es una fórmula de cuadratura Gaussiana.

**Problema 8:** Calcule el error de la fórmula de cuadratura Gaussiana

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

**Problema 9:** Determine el error y grado de precisión de la fórmula de integración

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \frac{4}{3}f(-0,5) - \frac{2}{3}f(0) + \frac{4}{3}f(0,5).$$

**Problema 10:** Encuentre una regla de cuadratura Gaussiana de la forma

$$\int_{-1}^1 f(x)x^2dx \approx A_0f(x_0) + A_1f(x_1)$$

que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 3.

**Problema 11:** Determinar  $N$  de modo que la regla del trapecio compuesta dé el valor de  $\int_0^1 f(x)dx$  con seis dígitos correctos después del punto decimal, suponiendo que  $e^{-x^2}$  se puede calcular de manera precisa.

**Problema 12:** Repita el ejercicio anterior pero utilizando la regla de Simpson compuesta.