Métodos Numéricos (2011)

Guía de problemas N° 7

Problema 1: Sea $x(t)$ una solución suave del problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, t) \\ x(0) &= x_0.\end{aligned}\tag{1}$$

Despreciando los términos de $\mathcal{O}(k^4)$ o superiores en el desarrollo de Taylor de $x(t)$ y usando la ecuación diferencial derive un método numérico de orden 3 para resolver el problema (es decir un método que sea localmente preciso de orden 4).

Problema 2: Considere la expansión de la solución para el método de Euler

$$v(t+k) = x(t) + k\varphi_1(t) + k^2\varphi_2(t) + \mathcal{O}(k^3).$$

Pruebe que si para un determinado problema no disponemos de la solución exacta, podemos verificar si un programa está funcionando correctamente calculando el cociente de precisión

$$\tilde{Q}(t) = \frac{v(t, k) - v(t, k/2)}{v(t, k/2) - v(t, k/4)}.\tag{2}$$

Para k suficientemente pequeño $\tilde{Q}(t)$ debería ser cercano a ¿qué valor?

Problema 3: El método de “Euler mejorado” para aproximar el problema (1) es

$$\begin{aligned}v_0 &= x_0 \\ \tilde{v}_{n+1} &= v_n + kf(v_n, t_n), \\ v_{n+1} &= v_n + kf\left(\frac{1}{2}(v_n + \tilde{v}_{n+1}), t_n + \frac{k}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots\end{aligned}$$

Pruebe que este método es localmente preciso de orden 3.

Problema 4: Suponga que aproxima el problema (1) con el método Clásico de Runge-Kutta de orden 4. La expansión de la solución para la solución de dicho método es de la forma

$$v(t+k) = x(t) + k^4\varphi_4(t) + k^5\varphi_5(t) + \mathcal{O}(k^6).$$

Pruebe que si el paso utilizado los cocientes de precisión $Q(t)$ y $\tilde{Q}(t)$ definidos en el teórico deben satisfacer

$$Q(t) = 2^4(1 + \mathcal{O}(k)), \quad \tilde{Q}(t) = 2^4(1 + \mathcal{O}(k)).$$