

Métodos Numéricos (2011)

Guía de problemas N° 8

Problema 1: (*Aproximación discreta de cuadrados mínimos*). Dada una grilla $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, se quiere encontrar la aproximación lineal, $p(x) = a_0 + a_1x$, a la tabla de valores (x_i, y_i) $i = 1, 2, 3, \dots, n$ que minimice la norma ℓ_2 al cuadrado de la diferencia de la aproximación con los valores y_i dados; es decir que minimice

$$\sum_{i=0}^n (p(x_i) - y_i)^2. \quad (1)$$

Muestre que los coeficientes a_0 y a_1 que minimizan (1) satisfacen:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2},$$

$$a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

Problema 2: Sean $f, g \in C([-1, 1])$, y

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

- a) Utilizando este producto interno y el procedimiento de Gram-Schmidt, calcule los cuatro primeros polinomios ortonormales que se obtienen a partir del conjunto $\{1, x, x^2, x^3 \dots\}$.
- b) Calcule ahora los cuatro primeros polinomios, utilizando el mismo producto interno, con el procedimiento iterativo

$$p_n(x) = (x - a_n)p_{n-1}(x) - b_n p_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

donde $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x - a_1$, y

$$a_n = \frac{(xp_{n-1}, p_{n-1})}{(p_{n-1}, p_{n-1})},$$
$$b_n = \frac{(xp_{n-1}, p_{n-2})}{(p_{n-2}, p_{n-2})}.$$

Normalice los polinomios calculados en b) y compare con los obtenidos en a).

Problema 3: Usando el producto interno y los cuatro primeros polinomios del problema anterior, calcule la mejor aproximación a la función e^x en el intervalo $[-1, 1]$.

Problema 4: (*Polinomios de Chebyshev*). Obtenga los primeros polinomios de Chebyshev, mediante el procedimiento de Gram-Schmidt aplicado al conjunto $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$, usando el producto interno

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Sugerencia: Note que con el cambio de variable $x = \cos(\theta)$,

$$(f, g) = \int_0^\pi f(\cos(\theta))g(\cos(\theta))d\theta.$$