

Métodos Numéricos (2012)

Guía de problemas N° 6

Problema 1: Considere la aproximación discreta a la derivada de $f(x)$ dada por la derivada del polinomio interpolatorio en forma de Lagrange:

$$f'(x_i) \approx \sum_{j=0}^n f(x_j) \ell_j'(x_i) \quad (1)$$

Muestre que (1) se reduce, para $n = 2$ y en $x = x_1$ a la aproximación de diferencias finitas “centrada” $D_0 f(x_1)$.

Problema 2: Probar que D_+ y D_- conmutan.

Problema 3: Probar que la “regla del trapecio” efectivamente calcula el área de un trapecio con base en las abscisas y vértices en $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Problema 4: Demuestre que la “regla de Simpson” efectivamente integra exactamente todos los polinomios de grado menor o igual a 3.

Problema 5: Mostrar que el error de la regla de Simpson es

$$-\frac{1}{90}(b-a)^5 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

Problema 6: La función $f(x)$, suave por pedazos, se define en el intervalo $[0, 1]$ como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Calcule los resultados de aplicar las siguientes reglas para hallar $\int_0^1 f(x) dx$:

- La regla del trapecio sobre el intervalo $[0, 1]$.
- La regla del trapecio, primero sobre el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ y luego sobre $[\frac{1}{2}, 1]$.
- La regla de Simpson sobre el intervalo $[0, 1]$.
- La regla del trapecio corregida sobre el intervalo $[0, 1]$.

¿Qué regla integra con menor error?

Nota: La regla del trapecio corregida es

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) + \frac{(b-a)^2}{12} (f'(a) - f'(b)).$$

Problema 7: Probar que la “regla del punto medio” integra exactamente polinomios de grado menor o igual que 1 y explique por qué la regla del punto medio es un fórmula de cuadratura Gaussiana.

Problema 8: Calcule el error de la fórmula de cuadratura Gaussiana

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Problema 9: Determine el error y grado de precisión de la fórmula de integración

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \frac{4}{3}f(-0,5) - \frac{2}{3}f(0) + \frac{4}{3}f(0,5).$$

Problema 10: Encuentre una regla de cuadratura Gaussiana de la forma

$$\int_{-1}^1 f(x)x^2 dx \approx A_0f(x_0) + A_1f(x_1)$$

que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 3.

Problema 11: Determinar N de modo que la regla del trapecio compuesta dé el valor de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ con seis dígitos correctos después del punto decimal, suponiendo que la función e^{-x^2} se puede evaluar sin error.

Problema 12: Repita el ejercicio anterior pero utilizando la regla de Simpson compuesta.