

PROBLEMAS de VALORES de FRONTERA.

Vamos a repasar algunos aspectos de la existencia, unicidad y regularidad para problemas elípticos lineales.

El problema elíptico fundamental puede enunciarse como:

$$\begin{aligned} Lu &= f & \text{en } U \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial U \end{aligned}$$

$U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto y la solución es $u: \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$. $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ es dada, y L es un operador elíptico (diferencial) de segundo orden.

L puede tomar la forma:

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} + c(x)u$$

(L en forma no divergencia), o bien

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a^{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} \right) + \sum_{i=1}^n b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} + c(x)u$$

(L en forma de divergencia).

Los coeficientes $a^{ij}(x)$ son simétricos en i, j .

$$a^{ij}(x) = a^{ji}(x) \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Definición: Decimos que el operador en derivadas parciales L es ^{uniformemente} elíptico si existe una constante $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) w_i w_j \geq \theta |w|^2$$

$$\forall x \in U \text{ y } \forall w \in \mathbb{R}^n.$$

$[a_{ij}(x)]$ es una forma cuadrática (uniformemente) definida positiva.

Soluciones débiles: Existen teoremas de existencia y unicidad, con distintos grados de regularidad, para soluciones débiles. Típicamente, con algún producto interno bien definido sobre $L^2(U)$, una solución débil sería una u tal que

$$(Lu, v) = (f, v) \quad \forall v \in L^2(U)$$

Nosotros vamos a concentrarnos en soluciones clásicas, i.e. $u \in C^\infty(U)$

Hay varios teoremas de existencia y unicidad formulados en general para soluciones débiles, que requieren alguna regularidad de los coeficientes a_{ij} , b_i , c y la fuente f . Mínimamente que sean funciones en $L^\infty(U)$.

Para cualquiera de estos problemas con

solución débil, si pedimos suavidad de L y f , obtenemos suavidad de la solución en el interior

Teorema: Sean $a^i_j, b^i, c \in C^\infty(U)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) y $f \in C^\infty(U)$. Si u es una solución débil de $Lu = f$ en U , entonces $u \in C^\infty(U)$.

Nota: Rec. que U es abierto. el teorema no dice nada sobre la regularidad en el borde ∂U . Podemos tener problemas elípticos donde la regularidad en el borde es limitada, o incluso sólo continuidad y aún discontinuidades, y sin embargo esas irregularidades no se propagan al interior.

Problemas elípticos típicos son

$$Lu = 0 \quad (\text{Laplace}) \quad (u \text{ armónica})$$

$$Lu = f \quad (\text{Poisson})$$

$$Lu = \lambda u \quad (\text{Helmholtz autor.}) \\ (u \text{ autof.}, \lambda \text{ autovalor de } L)$$

Las condiciones de borde típicas que podemos tener, para obtener exist. y unicidad son Dirichlet (homog. o inhomog.), Neuman en parte y Dirichlet en el resto. Combinación de u y ∂u en el borde, etc.

Nota: En física, muchos problemas elípticos surgen como el estado estacionario de procesos evolutivos. Ej. típico, la ecuación de calor.

Problemas en 1D.

Consideremos la ecuación de Poisson en el intervalo $[0,1]$:

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1 \quad (44.1)$$

con BC: $u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta \quad (44.2)$

Ejemplo simple pero ilustrativo para el estudio de errores y para introducir conceptos.

Operadores en diferencias finitas.

Sea $x_j = h_j$, $h = \frac{1}{M+1}$, $M \in \mathbb{N}$. grilla uniforme

La función $u(x)$ será aprox. por una función de grilla σ_j , $j=0, \dots, M+1$. El problema (44.1)-(44.2) fija los valores de σ_0 y σ_{M+1} : $\sigma_0 = \alpha$, $\sigma_{M+1} = \beta$, por lo que tenemos M valores incógnita: $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M$.

Def: i) $D_- \sigma_j = \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{h}$

ii) $D_+ \sigma_j = \frac{\sigma_{j+1} - \sigma_j}{h}$

iii) $D_0 \sigma_j = \frac{\sigma_{j+1} - \sigma_{j-1}}{2h}$

Son tres aprox. discretas para la deriv. primera de una función. D_+ y D_- aprox. derivadas laterales, y D_0 es una deriv. centrada. Si $f(x)$ es suave, por Taylor tenemos

$$\begin{aligned} D_+ f(x_j) &= \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{h} = \\ &= \frac{f(x_j + h) - f(x_j)}{h} \\ &= f'(x_j) + \frac{h}{2} f''(x_j) + O(h^2) \end{aligned}$$

$\therefore D_+$ es un operador de 1^{er} orden de precisión: es decir:

$$|D_+ f(x_j) - f'(x_j)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \text{ como } h^1.$$

Análogamente:

$$D_- f(x_j) = f'(x_j) - \frac{h}{2} f''(x_j) + O(h^2)$$

es orden 1. Y la diferencia centrada:

$$D_0 f(x_j) = f'(x_j) + \frac{h^2}{6} \frac{d^3 f}{dx^3}(x_j) + O(h^4)$$

es precisa de 2^o orden en h .

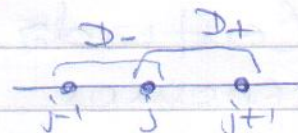
Para aprox. derivadas 2^{as}, la aprox. más simple, estándar es:

Definición: $D_+ D_- v_j = D_+ \left(\frac{v_j - v_{j-1}}{h} \right) = \frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{h^2}$

y resulta: $D_+ D_- \bar{v}_j = D_- D_+ \bar{v}_j$ y por Taylor

$$D_+ D_- f(x_j) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_j) + \frac{h^2}{12} \frac{d^4 f}{dx^4}(x_j) + O(h^4)$$

es de 2º orden de precisión.

- El "span" de D_+ y D_- es 2 
- El "span" de D_0 y $D_+ D_-$ es 3 

Ej. Encontrar α / $D_2 f_j = D_+ D_- (1 - \alpha h^2 D_+ D_-) f_j$
sea una aprox. de 4 de precisión de $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_j)$.

Aprox. de (44.1), (44.2)

Aprox. $\frac{d^2}{dx^2}$ por $D_+ D_-$ obtenemos.

$$(45.1) \quad D_+ D_- \bar{v}_j = f(x_j), \quad j=1, 2, \dots, M$$
$$\bar{v}_0 = \alpha, \quad \bar{v}_{M+1} = \beta.$$

Obien:

$$\frac{\bar{v}_{j-1} - 2\bar{v}_j + \bar{v}_{j+1}}{h^2} = f_j$$

$$(También: \bar{v}_{j-1} - 2\bar{v}_j + \bar{v}_{j+1} = h^2 f_j \quad j=1, 2, \dots, M)$$

Notemos que para $j=1$

$$\bar{v}_0 - 2\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = h^2 f_1$$

$$-2\sigma_1 + \sigma_2 = h^2 f_1 - \sigma_0 = h^2 f_1 - \alpha$$

analog. para $j=M$

$$\sigma_{M-1} - 2\sigma_M = h^2 f_M - \beta$$

y para $j=2, \dots, M-1$ aparecen sólo incógnitas del lado izq. Por lo que podemos escribir la aproximación (sistema lineal de ecuaciones) como un problema matricial

$$A \vec{\sigma} = \vec{F} \quad (46.1)$$

con $A \in \mathbb{R}^{M \times M}$, $\vec{\sigma}, \vec{F} \in \mathbb{R}^M$

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & 0 \\ \vdots & & \dots & 0 & 1 & -2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_M \end{bmatrix}; \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} f_1 - \alpha/h^2 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_M - \beta/h^2 \end{bmatrix}$$

Y calcular la solución numérica equivale a hallar la solución del sist. lineal (46.1)

Si $u(x)$ es la solución exacta de (44.1),
Definición El error de truncamiento de la aprox. (45.1)

$$\tau_j = D_+ D_- u(x_j) - f(x_j)$$

$$\Rightarrow \tau_j = \left[u''(x_j) + \frac{h^2}{12} u^{(4)}(x_j) + O(h^4) \right] - f(x_j)$$

$$\therefore \left[\tau_j = \frac{h^2}{12} \frac{d^4}{dx^4} u(x_j) + O(h^4) \right]$$

Vectorial mente $\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_M \end{pmatrix}$

Podemos escribir $\vec{\tau} = A\hat{u} - F$

donde $\hat{u} = \begin{pmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ \vdots \\ u(x_M) \end{pmatrix}$ (Clase 15/4 1er parcial)

Definición: El error (error global) de la aproximación es:

$$\vec{E} = \vec{r} - \hat{u}$$

O, en componentes, $E_j = r_j - u(x_j)$

Queremos mostrar que $\vec{E}$ es el mismo orden que $\vec{\tau}$ (i.e., $O(h^2)$). Para relacionar $\vec{E}$ con $\vec{\tau}$ necesitamos un concepto de "estabilidad" como con las ODE.

NORMA: Para medir el tamaño de $\vec{E}$ necesitamos una norma, por ejemplo la norma $\|\cdot\|_\infty$

$$\|\vec{E}\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq M} |E_j| = \max_{1 \leq j \leq M} |r_j - u(x_j)|$$

La esperanza es que podamos probar que $\vec{E}$ es del mismo orden que $\vec{\tau}$ (en h).

Dependiendo el problema puede convenir usar otras normas:

$$\|\vec{E}\|_1 = h \sum_{j=1}^M |E_j| \quad \text{o} \quad \|\vec{E}\|_2 = \left(h \sum_{j=1}^M |E_j|^2 \right)^{1/2}$$

y recordemos que en dim. finita todas las normas son equivalentes.

Ecuación del error

Notemos que: $A\vec{E} = A(\vec{\tau} - \hat{u})$

$$= A\vec{\tau} - A\hat{u}$$

$$= \vec{F} - A\hat{u} = -\vec{\tau}$$

$$\boxed{A\vec{E} = -\vec{\tau}} \quad (47.1)$$

En componentes:

$$\frac{1}{h^2} (E_{j-1} - 2E_j + E_{j+1}) = -\tau(x_j) \quad ; \quad j=1, 2, \dots, M$$

y notemos que $E_0 = 0$ y $E_{M+1} = 0$, i.e., las cond. de contorno de Dirichlet se imponen exactamente

Estabilidad y Convergencia

Notemos que cuando $h \rightarrow 0$, el tamaño

del sistema de ecuaciones crece (diverge)
pues $A \in \mathbb{R}^{M \times M}$ con $h = \frac{1}{M+1}$.

Para enfatizar que A , $\vec{v}$ y $\vec{z}$ dep. de h
escribimos:

$$A^h \vec{z}^h = -\vec{v}^h$$

pero entonces, si A^h es invertible

$$\vec{z}^h = -(A^h)^{-1} \vec{v}^h$$

tomando norma:

$$\|\vec{z}^h\| = \|(A^h)^{-1} \vec{v}^h\|$$

$$\leq \|(A^h)^{-1}\| \|\vec{v}^h\| \quad (47.2)$$

Recordemos que esta desig. vale cuando
usamos como norma matricial una
norma "subordinada" a la norma vectorial
(o norma operador) i.e.,

$$\|A\| = \sup_{\|\vec{v}\|=1} \{\|A\vec{v}\|\}$$

(47.2) motiva la def. de estabilidad:

Def: Diremos que un problema de valores
de frontera (46.1) lineal es estable cuando
las matrices A^h son invertibles para $h < h_0$
y $(A^h)^{-1}$ están uniformemente acotadas,
es decir, $\exists C$ indep. de h tal que

$$\|(A^h)^{-1}\| \leq C, \quad \forall h < h_0$$

De esta forma, si el método es consistente

$$(\text{o sea } \vec{\tau}^h = O(h^p), p > 0 \text{ y } \therefore \|\vec{\tau}^h\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0)$$

obtenemos convergencia, pues:

$$\|\vec{E}^h\| \leq \|(A^h)^{-1}\| \|\vec{\tau}^h\| \leq C \|\vec{\tau}^h\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

más aún, tenemos: que si el método es estable, entonces el orden del Error global es el mismo orden del error de truncamiento.

Lema: Estabilidad + $\vec{\tau} = O(h^p) \Rightarrow \vec{E} = O(h^p)$

Remarks: Típicamente, verificar la consistencia y orden de convergencia $\vec{\tau} = O(h^p)$ es la parte fácil del problema. Verificar que un método es estable es la parte difícil del análisis de un método. Mas aún a veces no es claro como definir la estabilidad, y hay que buscar la def. apropiada. Para problemas no lineales puede ser necesario recurrir a técnicas complicadas como "principle of frozen coefficients" o "localización". A veces las soluciones del problema no lineal se pueden acotar por súper-soluciones (o subsoluciones) de problemas lineales.

Remark 2: Un aspecto que puede influir en

la dificultad de probar Estabilidad es la elección de la norma para trabajar.

Un poco de álgebra (Normas)

Un aspecto básico, diferente a las ODE, es que la dimensión del espacio vectorial en que vive nuestra aproximación $\vec{x}$ es $m, m+1$ o $m+2$ con $h = \frac{1}{m+1}$, o sea que para variar h tenemos que cambiar la dimensión (ie. tamaño de los vectores y matrices del sistema). lo fundamental tal es que

$$\dim(V) = O\left(\frac{1}{h}\right)$$

Recordemos que: dada $\|\cdot\|$ en $V (= \mathbb{R}^m)$

$$\|A\| = \max_{\vec{v} \in V} \frac{\|A\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \max_{\substack{\vec{v} \in V \\ \|\vec{v}\|=1}} \|A\vec{v}\| \quad (48.1)$$

$$\therefore \forall w \quad \|Aw\| \leq \|A\| \|w\|$$

Calcular $\|A\|$ a partir de la definición puede ser complicado, pero para algunas normas de uso frecuente hay fórmulas explícitas. Por ej:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (\text{max. column sum})$$

$$(48.2) \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \quad (\text{max row sum})$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

donde $\rho(B)$ es el radio espectral de B , i.e., el mayor de los módulos de los autovalores de B .

Ejercicio: Pruebe las fórmulas (48.2)

~~Si h está fijo ($\Rightarrow$ dim. fija) entonces tenemos equivalencias entre todas las normas.~~

Estas fórmulas valen con las definiciones usuales de normas vectoriales en espacios de dimensión fija:

$$\|\vec{v}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} |v_i|$$

$$\left. \begin{aligned} (49.1) \quad \|\vec{v}\|_1 &= \sum_{i=1}^m |v_i| \\ \|\vec{v}\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^m |v_i|^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} (*)$$

Sin embargo, para funciones de grilla, donde nos interesa variar h (incluso tomar $\lim_{h \rightarrow 0}$), es más útil redefinir las normas h_1 y h_2 de manera que sean versiones discretas de las normas integrales L_1 y L_2 . Si no, claramente con las definiciones (*)

$$\|\vec{v}\|_{1,02} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty$$

Definición: Para funciones de grilla, $\|\cdot\|_{\infty}$ permanece igual, pero se define

$$(49.2) \quad \|\vec{v}\|_1 = h \sum_{i=1}^m |v_i| \quad \text{y} \quad \|\vec{v}\|_2 = \left(h \sum_{i=1}^m |v_i|^2 \right)^{1/2}$$

Ejercicio: Mostrar que con las def. (48.2) valen las equivalencias: $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$

$$\|\vec{v}\|_{\infty} \leq \|\vec{v}\|_1 \leq m \|\vec{v}\|_{\infty}$$

$$\|\vec{v}\|_{\infty} \leq \|\vec{v}\|_2 \leq \sqrt{m} \|\vec{v}\|_{\infty} \quad (49.3)$$

$$\|\vec{v}\|_2 \leq \|\vec{v}\|_1 \leq \sqrt{m} \|\vec{v}\|_2$$

Ejercicio: Sea ahora $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ represent. de una función de grilla. Según el problema en cuestión N puede ser m , $m+1$ o $m+2$. Mostrar que con las definiciones (49.2) las equivalencias son

$$h \|\vec{v}\|_{\infty} \leq \|\vec{v}\|_1 \leq N \cdot h \|\vec{v}\|_{\infty} = \frac{N(b-a)}{m+1} \|\vec{v}\|_{\infty}$$

$$(49.4) \quad \sqrt{h} \|\vec{v}\|_{\infty} \leq \|\vec{v}\|_2 \leq \sqrt{N} h \|\vec{v}\|_{\infty} = \sqrt{\frac{N(b-a)}{m+1}} \|\vec{v}\|_{\infty}$$

$$\sqrt{h} \|\vec{v}\|_1 \leq \|\vec{v}\|_2 \leq \sqrt{N} h \|\vec{v}\|_2 = \sqrt{\frac{N(b-a)}{m+1}} \|\vec{v}\|_2$$

Convergencia en $\|\cdot\|_2$

Para nuestro problema modelo (44.1) y (44.2) y su aproximación (45.1) probamos que, en cualquier norma,

$$\|\vec{E}^{(h)}\| \leq \|(A^h)^{-1}\| \|\vec{e}^{(h)}\|$$

Rec. que si $A\vec{v} = \lambda \vec{v} \quad \lambda \neq 0 \Rightarrow A^{-1}\vec{v} = (\lambda)^{-1}\vec{v}$

Además, puede verse que, como A^h es simétrica $\Rightarrow$ es diagonalizable y $\|A^h\|_2 = \rho(A^h)$: radio espectral

Queremos calcular pues los autovalores de A^h .
 Notemos que el problema de autovalores de A^h es una versión discreta del problema diferencial:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x) = \lambda f(x) \quad \text{con } \begin{matrix} x \in [0,1] \\ f(0) = \alpha \\ f(1) = \beta \end{matrix}$$

cuyas autofunciones y autov. son: $\{ \phi_n \}$

$$\left. \begin{aligned} \phi_n(x) &= \sin(\pi n x) \\ \lambda_n &= -\pi^2 n^2 \end{aligned} \right\} n=1, 2, 3, \dots$$

Para $A^h \in \mathbb{R}^{m \times m}$ prop. algo similar:

$$(\vec{\sigma}^p)_j = \sin(p \cdot \pi \cdot h_j) \quad (x_j = h_j)$$

Así:

$$\begin{aligned} (A \vec{\sigma}^p)_j &= \frac{1}{h^2} (\sigma_{j-1}^p - 2\sigma_j^p + \sigma_{j+1}^p) \\ &= \frac{1}{h^2} [\sin(p\pi h(j-1)) - 2\sin(p\pi h j) + \sin(p\pi h(j+1))] \\ &= \frac{1}{h^2} [2\sin(p\pi h j) \cos(p\pi h) - 2\sin(p\pi h j)] \\ &= \frac{2}{h^2} (\underbrace{\cos(p\pi h) - 1}_{\lambda_p \text{ (indep. de } j!)} \underbrace{\sin(p\pi h j)}_{(\vec{\sigma}^p)_j}) \end{aligned}$$

Tenemos pues m autovectores $\vec{v}^p$ y sus corresp. autovalores λ_p distintos.

$$\left. \begin{aligned} (\vec{v}^p)_j &= \sin(p\pi h j), \quad j=1,2,\dots,m \\ \lambda_p &= \frac{2}{h^2} (\cos(p\pi h) - 1) \end{aligned} \right\} p=1,2,\dots,m$$

Notemos que $p \cdot h = \frac{1}{m+1}, \frac{2}{m+1}, \dots, \frac{m}{m+1}$

por lo que, en módulo, el menor autovalor es:

$$|\lambda_1| = \frac{2}{h^2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{m+1}\right) - 1 \right) \approx 2(m+1)^2 \left(\frac{1}{2(m+1)^2} \right)$$

cuando $m \gg 1$, $|\lambda_1| \approx \pi^2 + O(h^2) + O\left(\frac{1}{m+1}\right)^4$

$$(\lambda_1 \approx -\pi^2 + O(h^2))$$

y los autovalores están alejados de 0 aún en el límite $h \rightarrow 0$.

Tenemos, para nuestro problema, en norma l_2 ,

$$\|E^h\|_2 \leq \|A^h\|_2 \|\tau^h\|_2 \approx \frac{1}{\pi^2} \|\tau^h\|_2 \quad (h \ll 1)$$

Además, como: $\tau^h \approx \frac{1}{12} h^2 u'' + O(h^4)$, y $u'' = f''(x)$

tenemos una estim. de E^h en función de deriv. de f :

$$\|E^h\|_2 \approx \frac{1}{12} h^2 \|f''\|_2 \quad (h \ll 1)$$

22/4/14

Estabilidad en norma $\| \cdot \|_\infty$ (funciones de Green)

Uno puede Estimar E^h en la norma $\| \cdot \|_\infty$, usando la "equivalecia" (49.4) con la norma $\| \cdot \|_2$. Sin embargo esta estimación no es muy buena, pues

$$\|E^h\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{h}} \|E\|_2 \approx O(h^{3/2})$$

perdemos la convergencia cuadrática.

Si podemos demostrar la estabilidad del problema directamente en $\| \cdot \|_\infty$, tendríamos convergencia cuadrática. Esto puede en efecto conseguirse acotando $(A^h)^{-1}$ en forma directa. Para esto repasamos el concepto de función de Green, de la cual $(A^h)^{-1}$ es una aproximación discreta.

Función de Green:

Problema:

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} = f(x), \quad 0 < x < 1$$

(S1.1)

$$\tilde{u}(0) = \alpha; \quad \tilde{u}(1) = \beta$$

Para resolver el problema mediante función de Green conviene primero transf. al problema a uno con condic. de contorno homogéneas

$$\text{def. } \tilde{u}(x) = u(x) + \alpha(1-x) + \beta x \quad (\text{S1.2})$$

tenemos que $\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x)$, $0 \leq x \leq 1$ (51.3)

$u(0)=0$, $u(1)=0$

La función de Green para este problema debe satisfacer:

(51.4) $\frac{d^2}{dx^2} G(x, x') = \delta(x - x')$ $0 < x < 1$
 $0 < x' < 1$
 $G(0, x') = 0$, $G(1, x') = 0$

Así la solución de (51.3) es:

$$u(x) = \int_0^1 G(x, x') f(x') dx'$$

y la solución de (51.1) es:

$$\tilde{u}(x) = \alpha(1-x) + \beta x + \int_0^1 G(x, x') f(x') dx'$$

$G(x, x')$ es una función continua, con derivada 1ª discontinua (Heaviside) en $x=x'$ y deriv. 2ª "delta". Es fácil ver que:

$$G(x, x') = \begin{cases} x(x'-1) & \text{si } 0 \leq x \leq x' \\ x'(x-1) & \text{si } x' \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (51.4)$$

Para resolver el problema con BC más generales (51.1), podemos escribir la solución como combinación lineal de soluciones

$$\tilde{u}(x) = \alpha(1-x) + \beta x + \int_0^1 G(x, x') f(x') dx' \quad (51.2)$$

(51.5)

La solución a este problema puede escribirse como

$$\vec{r} = A^{-1} \vec{f}$$

en componentes

$$r_i = \sum_{j=0}^{m+1} (A^{-1})_{ij} F_j$$

Lo que sugiere pensar a $(A^{-1})_{ij}$ como $hG(x_i, x_j)$

$$r_i = \sum_{j=0}^{m+1} h \underbrace{G_{ij}} F_j$$

función de Green discreta

Por comparación directa con (S1.4), (S1.5) proponemos:

$$G(x_i, x_j) = \begin{cases} \frac{1}{h}(1-x_i) & \text{si } j=0 \\ \left. \begin{aligned} x_i(x_j-1) & , i=1,2,\dots,j \\ (x_i-1)x_j & , i=j,j+1,\dots,m \end{aligned} \right\} & \text{si } 1 \leq j \leq m \\ \frac{1}{h}x_i & \text{si } j=m+1 \end{cases}$$

Es directo ver que $D_+ D_- (1-x_i) = 0$
y $D_+ D_- x_i = 0$ pues son funciones de grilla lineales.

Ejercicio: $D_+ D_- G(x_i, x_j) = \frac{1}{h} \delta_{ij}$ si $j=1,2,\dots,m$

Así la solución es

$$r_i = \underbrace{\alpha(1-x_i)} + \underbrace{\beta x_i} + h \sum_{j=1}^m G_{ij} F_j$$

Podemos volver al problema de la estabilidad. Queremos calcular $\|(A^{-1})\|_{\infty}$

Recordemos que (E_j 3, Guía 2)

$$\|(A^{-1})\|_{\infty} = \max_{0 \leq i \leq m+1} \sum_{j=0}^{m+1} |(A^{-1})_{ij}|$$

o sea el mayor de los valores de las filas sumadas.

$$(A^{-1})_{ij} = h E_{ij}$$

$$\text{Si } i=0 \quad (A^{-1})_{0j} = h E_{0j} = \delta_{0j} \quad (\text{primera fila})$$

$$\therefore |(A^{-1})_{0j}| \leq 1$$

$$\text{Si } i=m+1 \quad (A^{-1})_{m+1,j} = h E_{m+1,j} = \delta_{m+1,j} \quad (\text{última fila})$$

$$\therefore |(A^{-1})_{m+1,j}| \leq 1$$

Para las filas intermedias podemos ver que

$$|(A^{-1})_{ij}| = h |E_{ij}| \leq 1 + 1 + mh < 3.$$

$\therefore \|A^{-1}\|_{\infty} < 3$ y el problema es $\| \cdot \|_{\infty}$ -estable

NOTA: No es bueno usar la (A^{-1}) explícita para calcular la solución, pues el producto $(A^{-1}) \cdot \vec{F}$ requiere $O(m^2)$ operaciones - pues A^{-1} NO es sparse. Mientras que si se utiliza Eliminación Gaussiana para

resolver $A \vec{u} = \vec{F}$ con A tridiagonal (sparse) sólo hace falta $O(m)$ operaciones!

Problema con condiciones de cont. de Neumann

Cómo podemos resolver el problema

$$\frac{d^2}{dx^2} u = f(x)$$

$$\text{con } \frac{du(0)}{dx} = \sigma, \quad u(1) = \beta$$

Nota: Notar que no podemos prescribir la derivada en ambos extremos pues el problema es ill posed. (no hay unicidad)

1) Primer enfoque: derivada lateral en $x=0$

$$D_+ u_0 = \sigma \Rightarrow \frac{u_1 - u_0}{h} = \sigma$$

u_0 es ahora una incógnita

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} h & -h & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ 0 & 1 & -2 & \dots & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_m \\ u_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \\ f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_m \\ \beta \end{bmatrix}$$

El problema de este enfoque es que el error de trunc. es sólo $O(h)$ (1^{er} orden en x_0) y esto produce un error global $O(h)$

2) Segundo enfoque: Usar un "ghost point" en $x = -h$. O sea x_{-1} y v_{-1} lo cual agrega un punto al vector $\vec{v}$. Necesitamos una ecuación mas, simplemente usamos la ecuación orig. en $x=0$ y la cond. de Neumann con dif. centrada.

$$\frac{1}{h^2} (v_{-1} - 2v_0 + v_1) = f(x_0) \quad (54.1)$$

y
$$D_0 v_0 = \frac{1}{2h} (v_1 - v_{-1}) = \sigma$$

Esta aprox. es de 2° orden. Si uno no quiere usar x_{-1} y v_{-1} , eliminando v_{-1} de (54.1) obtenemos un sist. equiv. para $v_0, v_1, \dots, v_{n+1}$.

$$v_{-1} = v_1 - 2h\sigma$$

$$\therefore \frac{1}{h^2} (v_1 - 2h\sigma - 2v_0 + v_1) = f_0$$

$$\frac{2}{h^2} (v_1 - v_0) = f_0 + \frac{2}{h} \sigma$$

$$\text{o bien } \left[\frac{1}{h} (-v_0 + v_1) = \sigma + \frac{h}{2} f_0 \right] \quad (i)$$

Que es como el caso de la deriv. lateral (primer enfoque) pero con un valor de σ corregido en $O(h)$. También puede pensarse a (54.2) como una deriv. centrada en $x_{0+\frac{1}{2}} = x_0 + \frac{h}{2}$

3) Tercer enfoque: Derivada lateral de 2º orden:

$$\frac{1}{h} \left(\frac{3}{2} \sigma_0 - 2\sigma_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \right) = \sigma$$

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} \frac{3}{2}h & -2h & \frac{1}{2}h & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ 0 & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 0 & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \\ f_1 \\ \vdots \\ f_m \\ \beta \end{bmatrix}$$

Rompe un poco la estruct. tridiag, pero se puede resolver con poco esf. extra.

Ecuación lineal gen.

Problema: $a(x) \frac{d^2 u}{dx^2} + b(x) \frac{du}{dx} + c(x)u(x) = f(x)$

Con Dirichlet: $u(a) = \alpha$; $u(b) = \beta$

Podemos aprox. $x_i = a + hi$, $h = \frac{b-a}{m+1}$

$$a(x_i) D_+ D_- \sigma_i + b(x_i) D_0 \sigma_i + c(x_i) \sigma_i = F_i$$

donde $i=1, 2, \dots, m$

$$F_i = \begin{cases} f_1 - \left(\frac{a_1}{h^2} - \frac{b_1}{2h} \right) \alpha & i=1 \\ f(x_i) = f_i & i=2, \dots, m-1 \\ f_m - \left(\frac{a_m}{h^2} + \frac{b_m}{2h} \right) \beta & i=m \end{cases}$$

Claramente, por los coef. variabl. y la deriv. la matriz A que repres. el lado izq. de la ecuación no es simétrica.

$$A = \begin{bmatrix} (h^2 c_1 - 2a_1) & (a_1 + h b_1 / 2) & 0 & \dots \\ (a_2 - h b_2 / 2) & (h^2 c_2 - 2a_2) & (a_2 + h b_2 / 2) & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Esta discretiz. es precisa de 2° orden. Si la matriz resulta singular, no hay solución única (indicación de que el problema diferencial no es well-posed).

Ejemplo: En algunos problemas hay varias opciones, algunas mejores que otras.

Considere: $\frac{d}{dx} \left(x(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x) \quad (SS-1)$

1ª opción: $x(x) \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{dx}{dx} \frac{du}{dx} = f(x)$

$$\Rightarrow x_j D_+ D_- u_j + x'_j D_0 u_j = F_j$$

la matriz resultante A no es simétrica

2ª opción: Mantenemos (SS-1) y discretiz. de la sig. forma.

Usamos puntos intermedios de la grilla

y aprox: $x(x_{i+\frac{1}{2}}) \frac{du}{dx}(x_{i+\frac{1}{2}}) \approx x_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right)$

deriv. centrada en $x_{i+\frac{1}{2}} = x + h(i+\frac{1}{2})$

Luego:

$$\frac{d}{dx} \left(x(x) \frac{du}{dx} \right) (x_i) \approx \frac{1}{h} \left[x_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right) - x_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{h} \right) \right]$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \left[x \frac{du}{dx} \right] (x_i) \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} \left[x_{i-\frac{1}{2}} v_{i-1} - (x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}) v_i + x_{i+\frac{1}{2}} v_{i+1} \right]$$

Que conduce a una matriz simétrica

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -(x_{\frac{1}{2}} + x_{\frac{3}{2}}) & x_{\frac{3}{2}} & & & \\ x_{\frac{3}{2}} & -(x_{\frac{3}{2}} + x_{\frac{5}{2}}) & x_{\frac{5}{2}} & & \\ & x_{\frac{5}{2}} & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Esta aprox. también es de 2° orden de precisión, pero la simetría ayuda mucho. Puede verse más fácilmente que el problema es estable con A definida negativa (prop. muy deseable en algunos métodos numéricos para resolver el probl. lineal resultante).

¿Cómo resolver el sistema $A\vec{v} = \vec{F}$?

Los sistemas "tridiagonales" o "sparse" pueden resolverse eficientemente con métodos directos (Eliminación Gaussiana, desc. LU, desc. comp. de Cholesky, etc.) con $O(n)$ operac.

Sin embargo si el problema es no lineal podemos vernos forzados a iterar.

Problema No lineal.

Podemos tener problemas no lineales:

$$a(x,u) \frac{d^2 u}{dx^2} + b(x,u) \frac{du}{dx} + c(x,u) u = f(x,u)$$

Con, por ej: $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$
Que pueden discretizarse por ejemplo como:

$$a(x_i, u_i) D_+ D_- u_i + b(x_i, u_i) D_0 u_i + c(x_i, u_i) u_i = f(x_i, u_i)$$

$$i=1, 2, \dots, m \quad ; \quad u_0 = \alpha, \quad u_{m+1} = \beta$$

Que puede escribirse vectorialmente como

$$\vec{F}(\vec{u}) = 0, \quad \text{con } \vec{F}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Para resolver este problema discreto no lineal no nos queda más remedio que iterar.

Podemos por ej usar método de Newton.

$$\text{Taylor} \Rightarrow \vec{F}(\vec{u}^{(n)}) + J_{\vec{F}}(\vec{u}^{(n)}) \delta \vec{u}^{(n)} + O(\delta \vec{u}^{(n)})^2$$

$$\text{desprecia } O(\delta \vec{u}^{(n)})^2 = 0$$

$$\Rightarrow \delta \vec{u}^{(n)} = \vec{u}^{(n+1)} - \vec{u}^{(n)} \approx - \left(J_{\vec{F}}(\vec{u}^{(n)}) \right)^{-1} \vec{F}(\vec{u}^{(n)})$$

$$\therefore \vec{u}^{(n+1)} = \vec{u}^{(n)} - \left[J_{\vec{F}}(\vec{u}^{(n)}) \right]^{-1} \vec{F}(\vec{u}^{(n)})$$

Produce, partiendo de un $\vec{r}^{(0)}$ inicial una sucesión, $\vec{r}^{(0)}, \vec{r}^{(1)}, \vec{r}^{(2)}, \dots$

Frecuentemente conviene escribir el sistema como:

$$J_F(\vec{r}^{(m)}) \cdot (\vec{r}^{(m+1)} - \vec{r}^{(m)}) = -F(\vec{r}^{(m)}) \quad (56.1)$$

y resolver sin invertir la matriz Jacobiana.

Nota 1: Si J_F no es sparse, frecuent. conviene resolver (56.1) sólo aprox. con un método iterativo (tipo Gauss-Seidel) pues de nada sirve invertir más esfuerzo para resolver exactamente (por ej. con Eliminación Gaussiana) si igualmente tendremos que iterar sobre "n".

Ejemplo: Problema semilineal

$$0 \leq x \leq 1 \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = f(u) \quad ; \quad u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta$$

Discretiz:

$$D_+ D_- u_i = f(u_i)$$

$$\therefore A u_i - F_i = 0$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} f(u_1) - \frac{\alpha}{h^2} \\ f(u_2) \\ \vdots \\ f(u_{m-1}) \\ f(u_m) - \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}$$

$$0 \text{ bien } \vec{G}(\vec{u}) = 0$$

doble

HOJA N°

57

FECHA

$$\vec{G}(\vec{r}) = A\vec{r} - \vec{F}(\vec{r})$$

Por lo que la matriz Jacobiana de $\vec{G}$ es

$$J_{Gj} = A_{ij} - f'(\omega_i) \delta_{ij} \quad \text{O sea, el sistema}$$

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 - h^2 f'(\omega_1^n) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 - h^2 f'(\omega_2^n) & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 - h^2 f'(\omega_3^n) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 - h^2 f'(\omega_m^n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^{n+1} \\ \omega_2^{n+1} \\ \vdots \\ \omega_m^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\omega_1^n) - \frac{\alpha}{h^2} \\ f(\omega_2^n) \\ \vdots \\ f(\omega_m^n) - \frac{\beta}{h^2} \end{bmatrix} \quad (57.1)$$

Nota: Notemos que en todo este problema no lineal y su aproximación tenemos dos niveles de aproximación y también los niveles de precisión.

Si resolvemos mediante iteraciones de Newton el problema algebraico no lineal $\vec{G}(\vec{r}) = 0$, podemos por ejemplo iterar hasta que $\|\delta \vec{r}^{(n)}\|_{\infty} = \|\vec{r}^{(n)} - \vec{r}^{(n-1)}\|_{\infty} \leq 10^{-15}$

(Estaríamos resolviendo $\vec{G}(\vec{r})$ con precisión cercana a la precisión de máquina de precis. doble)

Sin embargo no hay que confundir esto con la precisión con que el ~~problema~~ $\vec{v}$ aproxima a la $u(x)$ solución del problema diferencial original. Esto está medido por $E_i = v_i - u(x_i)$ ($\vec{E} = \vec{v} - \hat{u}$) y pudiera ser mucho mayor que 10^{-15} . Es importante distinguir esto.

NOTA 2: También hay que reconocer que en muchos problemas no lineales hay varios niveles de iteración.

Por ej en el ejemplo anterior, en vez de utilizar un método directo para resolver (57.1) podría usar un método iterativo (como Gauss-Seidel) y tendría 2 niveles de iteración y 3 niveles de error.

Iteraciones: Gauss-Seidel $\rightarrow$ Newton

Errores: i) error en la determ. de $\vec{v}^{n+1}$ (GS)
 ii) tamaño de $\|\vec{v}^{(n+1)} - \vec{v}^{(n)}\|_\infty$ (Newton)
 iii) " de $\|\vec{v} - \hat{u}\|_\infty$ (discretización)

Error de truncamiento, Global y Estabilidad

• Sup. que $u(x)$ es la solución exacta de nuestro problema diferencial, y $\hat{u}$ el vector de u evaluada sobre la grilla.

• Sea $\vec{G}(\vec{v}) = 0$ el método discreto no lineal que aproxima nuestro problema.

Como antes, el error de truncamiento será la deficiencia de $\hat{u}$ a satisfacer el método numérico, i.e., el sist. discreto

$$\vec{\tau} = \vec{G}(\hat{u})$$

Como $\vec{0} = \vec{G}(\vec{r})$

$$\Rightarrow \vec{G}(\vec{r}) - \vec{G}(\hat{u}) = -\vec{\tau}$$

(Si el problema fuese lineal, $\vec{G}(\vec{r} - \hat{u}) = -\vec{\tau}$
 $\Rightarrow \vec{G}(\vec{E}) = -\vec{\tau}$)

Usando Taylor: $\vec{G}(\vec{r}) = \vec{G}(\hat{u}) + J_{\vec{G}}(\hat{u}) \underbrace{(\vec{r} - \hat{u})}_{\vec{E}} + \underbrace{O(\|\vec{E}\|^2)}_{= O(\|\vec{E}\|^2)}$

$\therefore$ La ecuación del error global es:

$$J_{\vec{G}}(\hat{u}) \vec{E} = -\vec{\tau} + O(\|\vec{E}\|^2)$$

Cuando estamos cerca de la solución, ($\|\vec{E}\|$ es pequeño) y, ignorando $O(\|\vec{E}\|^2)$, vemos que la relación entre el

Esto motiva la definición de estabilidad siguiente:

Def: El método no lineal en diferencias

$\vec{G}(\vec{x}) = 0$ es estable en una norma $\|\cdot\|$ si las matrices $(J_G^h)^{-1}$ están uniformemente acotadas cuando $h \rightarrow 0^+$. Es decir $\exists C > 0$, independiente de h , tal que

$$\| (J_G^h)^{-1} \| \leq C \quad \forall h \leq h_0$$

Así como en el caso lineal si el método es estable y $\vec{\tau}(h) = O(h^p)$

$\Rightarrow \vec{E} = O(h^p)$. Sin embargo la prueba de este resultado es más complicada pues hay que estimar los términos no lineales. No veremos el detalle.

NOTA: Una vez más. No confundir la convergencia del método numérico $\vec{x} \rightarrow u$ ($h \rightarrow 0$) con la convergencia de Newton (h fijo)