Análisis Numérico

Trabajo de Laboratorio N° 4

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Problema 1: Realizá un programa en C que te permita resolver numéricamente el problema de valores iniciales de la forma,

$$x' = f(x,t)$$
$$x(a) = x_0$$

utilizando el método de Euler en el intervalo $a \leq t \leq b$ con un paso de integración de h. La salida debe ser un archivo de dos columnas: t y $x(t)$.

Problema 2: Utilizando el programa del ejercicio anterior, resolvé mediane el método de Euler el siguiente problema de valores iniciales:

$$x' = -x + \sin(2\pi t)$$
$$x(0) = 1{,}0$$

en el intervalo $0 \leq t \leq 1$ con un paso de integración $h = 0{,}1$. Sabiendo que la solución exacta es

$$x_e(t) = \left(1 + \frac{2\pi}{1+4\pi^2}\right)e^{-t} + \frac{\sin(2\pi t) - 2\pi\cos(2\pi t)}{1+4\pi^2}$$

modificá el programa del ejercicio anterior de forma tal que grafique también el error global $\epsilon(t) = |x(t) - x_e(t)|$. Calculá y graficá $\epsilon(t)$ usando $h = 0{,}01$ y $h = 0{,}005$ y verificá que en el segundo caso el mismo disminuye a la mitad.

Problema 3: Realizá un programa en C que te permita resolver numéricamente el problema de valores iniciales de la forma

$$x' = f(x,t)$$
$$x(a) = x_0$$

utilizando el método de Runge-Kutta de 4° orden en el intervalo $a \leq t \leq b$ con un paso de integración de h. La salida debe ser un archivo de dos columnas: t y $x(t)$.

Problema 4: Repetí el problema 3, pero esta vez usando el método de Runge-Kutta de 4° orden en lugar del método de Euler.

Problemas complementarios

Problema 5: Considerá el problema de valores iniciales para la ecuación de la dinámica de un péndulo simple longitud l

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin(\theta), \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \frac{d\theta}{dt}(0) = \theta'_0,$$

donde g es la acelaración de la gravedad. Definiendo $u = \theta'$ esta ecuación de segundo orden se puede escribir como un sistema de dos ecuaciones de primer orden

$$\frac{d\theta}{dt} = u \tag{1}$$
$$\frac{du}{dt} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) \tag{2}$$

mientras que las condiciones iniciales transformadas quedan $(u(0), \theta(0)) = (\theta'_0, \theta_0)$.

Modificá el programa del ejercicio 3 de forma tal que resuelva ahora este sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas usando $g = 10m/s^2$ y $l = 1m$. La salida debe ser un archivo de tres columnas t, $\theta(t)$ y $u(t)$.

a) Graficá θ vs. t, para $0 \leq t \leq 10$, con las siguientes condiciones iniciales: a) $u(0) = 0$ y $\theta(0) = 0{,}5$ y b) $u(0) = 0$ y $\theta(0) = 0{,}5$

b) Para las condiciones iniciales $\theta(0) = \theta_0$, y $u(0) = 0$, y sólo cuando $\theta_0 \ll 1$, la solución exacta de este problema satisface $\theta(t) \simeq \theta_0 \cos(\sqrt{10}t)$. Para verificar esto modificá el programa realizado para calcular y graficar la diferencia $\theta(t) - \theta_0 \cos(\sqrt{10}t)$, para $0 \leq t \leq 10$, en los casos $\theta_0 = 1$ y $\theta_0 = 10^{-2}$.

Problema 6: La llamada *ecuación logística*

$$\frac{dN}{dt} = r\,N\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

describe el crecimiento autolimitado de una población dada (suponiendo que no interactúa con otras especies y que tiene fuentes limitadas de alimentos). Fue propuesta por Verhulst en 1838 y permite describir al menos cualitativamente varios fenómenos poblacionales observados en la naturaleza. En esta ecuación $N(t)$ es el número de individuos de la colonia al tiempo t y K es una constante positiva.

Una solución N^* se dice estacionaria si se satisface que $dN^*/dt = 0$, y por ende no cambia en el tiempo. Para esta ecuación es fácil verificar que sólo existen dos soluciones estacionarias: $N_1^* = 0$ y $N_2^* = K$.

Determiná cual de las dos soluciones estacionarias es estable y cual inestable resolviendo numéricamente la ecuación diferencial con el método Runge-Kutta de cuarto orden para $r = 2$, $K = 100$, en el intervalo $0 \leq t \leq 50$ con $h = 0{,}1$ y considerando cinco condiciones iniciales diferentes: a) $N(0) = 0$, b) $N(0) = 2$, c) $N(0) = 50$, d) $N(0) = 120$ y d) $N(0) = 200$. Graficá simultaneamente las cinco soluciones t vs. $N(t)$ en el intevalo $0 \leq t \leq 50$.