Euler y particiones.

(Curso en homenaje a los 300 años del nacimiento de Euler)

Dado en la reunión anual UMA 2007

Por Daniel Penazzi

WARNING: si bien he tratado de purgar posibles errores de tipeo, indudablemente deben haber quedado algunos. En particular, faltan numerosos acentos.

1. Introducción

Este año se cumplen 300 años del nacimiento de Leonhardt Euler (15 de abril de 1707). Euler fue uno de los mas grandes matemáticos de todos los tiempos, y ciertamente el mas prolifico. Entre otras cosas, Euler fue el inventor de la teoria de grafos (con su resolución del problema de los puentes de Konisgberg) y le debemos la formula (número de caras)-(número de lados)+(número de vertices)=2. Tambien fue el primero en calcular el valor de la serie $\sum \frac{1}{n^2} (= \frac{\pi^2}{6})$. Su influencia en la forma en que escribimos matematica es enorme: a el le debemos la notacion $\sum$ para suma, $f(x)$ para función, π para el cociente entre la circunferencia y el diametro, i para $\sqrt{-1}$ y por supuesto e para la base de los logaritmos naturales. Tambien $\phi(m)$ para denotar $\#\{1 \leq n \leq m | \text{mcd}(n,m) = 1\}$. Fue el primero en publicar (aunque Leibnitz ya lo habia hecho en una carta) una prueba del pequeño teorema de Fermat (p primo entonces p divide a $a^{p-1} - 1$) y su generalización (n divide a $a^{\phi(a)} - 1$ si $\text{mcd}(a,n) = 1$). Probó el (ultimo) teorema de Fermat para el caso $n = 3$. Desprobó la conjetura de Fermat que $2^{2^n} + 1$ es primo para todo n. (Euler probó que $2^{2^5} + 1 = 641 \times 6700417$).

En 1748 publicó el *Introductio in Analysin Infinitorum.* Este libro es considerado uno de los libros mas influyentes de todos los tiempos en matemática. Entre otras cosas, aparece la formula $e^{ix} = \cos x + i \text{ sen } x$. (de donde deducimos $e^{\pi i} + 1 = 0$, que es una famosa ecuación que involucra las 5 grandes constantes de la matematica). Tambien alli Euler define por primera vez las conicas no con relación a secciones del cono, sino con relación a ecuaciones algebraicas, trabaja con el seno, coseno, etc como funciones por primera vez, etc

Uno de los capitulos del libro, el capitulo 16, lleva el nombre "De Partitio Numerorum", ("Sobre particiones de números') y será el objetivo de este curso: Dado un número natural n, $p(n)$ denota el número de formas de escribir n como suma de números naturales, donde el orden no importa. (esto se llama una "partición" de n). el objetivo de este curso es realizar una introducción al estudio de particiones, y en particular una formula recursiva para calcular $p(n)$, de la ucal es auotr Euler. La prueba que daremos es una prueba combinatorial debida al estadounidense F. Franklin. La idea de este minicurso es usar este teorema como excusa para exponer algunos conceptos importantes en la teoria combinatorial de particiones, como diagramas de Ferrer y Series Formales de Potencias. Tambien veremos otro teorema de Euler, donde se prueba que el número de particiones de n en partes distintas es igual al número de particiones de n en partes impares y relaciones entre productos y series infinitas.

2. Particiones

En lo que sigue, por "número natural" entendemos alguno de los números $1, 2, 3...$, i.e., los enteros positivos. (no incluimos el cero). $\mathbb{N}$ denota el conjunto de naturales, y $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2.1 Definición :

Dado un número natural n, una partición de n en k partes es una k-upla $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ de números naturales tal que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_k$ con $n = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k$.

Los números λ_i se llaman las partes *de la partición. El número de particiones de n se denota por $p(n)$. En otras palabras, $p(n)$ es el número de formas de escribir n como suma de números naturales, donde el orden no importa.*

Por convención, definimos $p(n) = 0$ si $n < 0$ y $p(0) = 1$. Si $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$ es una partición de n, denotaremos este hecho con la notación $\lambda \vdash n$ o bien $|\lambda| = n$.

Veamos algunos ejemplos:

1) $p(1) = 1$ pues solo podemos escribir $1 = 1$.

2) $p(2) = 2$ pues podemos escribir $2 = 2$ y $2 = 1 + 1$.

3) $p(3) = 3$, puesto que podemos escribir $3 = 3$, $3 = 2 + 1$, $3 = 1 + 1 + 1$.

Hasta ahora, $p(n) = n$, pero ya empieza a crecer:

4) $p(4) = 5$, pues podemos escribir $4 = 4$, $4 = 3 + 1$, $4 = 2 + 2$, $4 = 2 + 1 + 1$ y $4 = 1 + 1 + 1 + 1$.

5) $p(5) = 7$, pues tenemos:

$$
\begin{aligned}
5 &= 5 \\
&= 4 + 1 \\
&= 3 + 2 \\
&= 3 + 1 + 1 \\
&= 2 + 2 + 1 \\
&= 2 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
&= 1 + 1 + 1 + 1 + 1
\end{aligned}
$$

Algunos otros valores son: $p(6) = 11$, $p(10) = 42$, $p(20) = 627$,$p(100) = 190.569.292$ $p(200) = 3.972.999.029.388$. Observar que si se quisiera listar todas las particiones de 200, y se demorara un segundo en escribir cada una, tomaria mas de 125000 años listarlas a todas. Con lo cual es obvio que $p(200)$ no se calcula listandolas una por una. En este curso veremos mas adelante una formula recursiva, descubierta por Euler, para calcular $p(n)$ en base a los valores anteriores. Esta formula es la que todavia se usa para calcular $p(n)$ para valores grandes de $p(n)$.

Algunas veces no se necesita calcular $p(n)$, sino el número de particiones de n con alguna restricción en las partes. De hecho, la primera persona interesada en particiones parece haber sido un tal Philipp Naudé, que se preguntó en 1740 cuantas formas habai de escribir un número como suma de números DISTINTOS.

Usaremos las siguientes:

2.2 Notaciónes :

.-$q(n)$ denotara el número de particiones de n con todas las partes distintas.

.-$p_e(n)$ y $p_o(n)$ denotaran el número de particiones de n con todas las partes pares ("Even") y todas las partes impares ("Odd"), respectivamente.

.-Similarmente, $q_e(n)$ denotara el número de particiones de n con todas las partes pares y distintas, y $q_o(n)$ el número de particiones de n con todas las partes impares y distintas.

Por ejemplo, vimos arriba que $p(5) = 7$, pero observando las particiones, tenemos que $q(5) = 3$, porque las unicas particiones con partes distintas son $5 = 5$, $5 = 4 + 1$ y $5 = 3 + 2$. Por otro lado, $p_e(5) = q_e(5) = 0$ (esto vale, obviamente, para todo número impar), mientras que $p_o(5) = 3$ (particiones $5 = 5$, $5 = 3 + 1 + 1$ y $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$) mientras que $q_o(5) = 1$ (solo $5 = 5$).

Tambien se puede querer restringir o bien el número de partes de la partición, o bien la parte mas grande. Por ejemplo, las particiones de 5 en a lo sumo 3 partes son: $5 = 5$, $5 = 4 + 1$, $5 = 3 + 2$, $5 = 3 + 1 + 1$ y $5 = 2 + 2 + 1$, es decir, hay cinco. Mientras que las particiones de 5 con parte mas grande a lo sumo 3 son $5 = 3+2$, $5 = 3+1+1$, $5 = 2+2+1$, $5 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1$ y $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. Observar que tambien son 5 particiones.

$p_k(n)$ denota el número de particiones de n en exactamente k partes. Una formula recursiva para $p_k(n)$ es: $p_k(n) = p_{k-1}(n - 1) + p_k(n - k)$, pues si una partición tiene la parte 1, la podemos borrar, y si no, podemos restarle 1 a todas las partes.

Dada una partición, se puede construir una partición asociada a la misma, llamada la partición *conjugada*:

2.3 Definición :

La conjugada de una partición λ es la partición λ' definida por $\lambda'_i =$ número de partes de λ que son mayores o iguales que i. (solo definida hasta el i que es igual a la mayor parte de λ)

Por ejemplo, si λ es la partición $19 = 5 + 5 + 4 + 3 + 1 + 1$, entonces tenemos:

λ'_1 =(número de partes mayores o iguales que 1)=6.

λ'_2 =(número de partes mayores o iguales que 2)=4.

λ'_3 =(número de partes mayores o iguales que 3)=4.

λ'_4 =(número de partes mayores o iguales que 4)=3.

λ'_5 =(número de partes mayores o iguales que 5)=2.

(No seguimos, porque tendriamos λ'_6 =(número de partes mayores o iguales que 6)=0, etc,)

Por lo tanto λ' es $19 = 6 + 4 + 4 + 3 + 2$. Observemos que en este ejemplo λ' es una partición del mismo número que λ. Esto es facil de ver que siempre ocurre, y lo veremos en un segundo.

Como ultima notación, denotaremos por $k(n)$ el número de particiones que son auto-conjugadas, es decir, tales que $\lambda' = \lambda$. Por ejemplo, calculemos $k(5)$, para lo cual podemos obtendremos las conjugadas de las 7 particiones de 5:

La conjugada de $5 = 5$ es $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

La conjugada de $5 = 4 + 1$ es $5 = 2 + 1 + 1 + 1$.

La conjugada de $5 = 3 + 2$ es $5 = 2 + 2 + 1$

La conjugada de $5 = 3 + 1 + 1$ es $5 = 3 + 1 + 1$ (por lo tanto es autoconjugada!)

La conjugada de $5 = 2 + 2 + 1$ es $5 = 3 + 2$.

La conjugada de $5 = 2 + 1 + 1 + 1$ es $5 = 4 + 1$.

La conjugada de $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ es $5 = 5$.

Por lo tanto, $k(5) = 1$.

Vemos en este ejemplo es que la conjugada de la conjugada es la partición original. Enseguida veremos que esto vale en general.

Dos de las técnicas mas usadas para tratar con problemas de particiones son: Series formales de potencias, y diagramas de Ferrer. Veamos primero estos ultimos.

3. Diagrama de Ferrer de una partición

Simplemente, si la partición es $n = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k$, el diagrama de Ferrer de la partición es un dibujo de puntos, donde se colocan λ_1 puntos en la primera fila, λ_2 puntos en la segunda fila, etc. Por ejemplo, el diagrama de Ferrer de la partición $19 = 5+5+4+3+1+1$ es:

$$\begin{array}{ccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & \\
\bullet & & & & \\
\bullet & & & &
\end{array}$$

Algunos autores prefieren dibujar un cuadrado en vez de un circulo, en ese caso el diagrama de Ferrer se llama diagrama de Young. (la ventaja de los cuadrados es que se pueden escribir números adentro, y nuevos problemas pueden sere investigados, pero no los veremos en este curso).

Como primera aplicación veamos:

3.1 Propiedad :

La conjugada de una partición λ es la partición λ' que se obtiene de λ intercambiando las filas con las columnas en el diagrama de Ferrer de λ.

Por ejemplo, la conjugada de la partición $19 = 5 + 5 + 4 + 3 + 1 + 1$ se obtiene trasponiendo el anterior diagrama, obteniendo:

$$\begin{array}{cccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & & \\
\bullet & \bullet & & & &
\end{array}$$

es decir, $19 = 6 + 4 + 4 + 3 + 2$, como habiamos visto.

Prueba de la Propiedad: obvio. (el número de $\bullet$ en la primera columna del diaframa de Ferrer indica cuantas partes son al menos 1. Similarmente, el número de $\bullet$ en la segunda columna indica cuantas partes son al menos 2, etc).

3.2 Corolario :

La conjugada de la conjugada es la partición original. Ademas, $\lambda \vdash n \Rightarrow \lambda' \vdash n$.

Otro corolario directo del uso de diagramas de Ferrer es la siguiente (doble) propiedad.

3.3 Propiedad :

El número de particiones de n en exactamente (a lo sumo) k partes es igual al número de particiones de n con parte mas grande igual a k (en partes no mayores a k).

Prueba:

Directa, trasponiendo el diagrama de Ferrer.

Otro resultado que podemos obtener de los diagramas de Ferrer es uno que no es tan trivial: En el ejemplo de $n = 5$, vimos que $q_o(5) = 1$ y tambien vimos que $k(n) = 1$. Esto es cierto en general:

3.4 Teorema :

$$q_o(n) = k(n)$$

Prueba:

Dada una partición autoconjugada λ considere la partición $\tilde{\lambda}$ formada de la siguiente forma: construya el diagrama de Ferrer de λ. Ahora, forme $\tilde{\lambda}$ poniendo en una primera fila todos los puntos en la primera fila y primera columna de λ, en la segunda fila todos los puntos en la segunda fila y segunda columna de λ, menos aquellos en la primera columna y primera fila; etc. Por ejemplo, si λ es $19 = 5 + 5 + 4 + 3 + 2$:

$$\begin{array}{ccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & \\
\bullet & \bullet & & &
\end{array}$$

entonces podemos "ver" la transformación "pintando" los distintos niveles con colores:

$$\begin{array}{ccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \circ & \circ & \circ & \circ \\
\bullet & \circ & * & * & \\
\bullet & \circ & * & & \\
\bullet & \circ & & &
\end{array}$$

es decir, poniendo los $\bullet$ como primera parte, los $\circ$ como segunda y los $*$ como tercera, $\tilde{\lambda}$ seria:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & & \\
* & * & * & & & & & &
\end{array}$$

i.e. $19 = 9 + 7 + 3$.

Como λ es autoconjugada, en particular el número de partes es igual a la parte mas grande. Asi, la cantidad de puntos en la primera fila sera igual a la cantidad de puntos en la primera columna. Como el punto que esta en la intersección de la primera fila y primera columna se usa solo una vez, la primera parte de $\tilde{\lambda}$ es impar. El mismo razonamiento vale para las otras partes, y esta claro que las partes son estrictamente decrecientes.

Viceversa, si se tiene una partición en partes impares distintas, es claro que podemos reordenar los puntos en la forma inversa a lo anterior descripto para obtener una partición autoconjugada.

QED.

Veamos ahora otra herramienta muy usada en la teoria de particiones (y en general, en Combinatoria)

4. Series Formales de Potencias (SFPs)

Si bien daremos la definición de una serie formal de potencias sobre un anillo A cualquiera, en general trabajaremos sobre el anillo de los enteros o el de los racionales. $\mathbb{N}_0$ denotará el conjunto de enteros no negativos, es decir, los naturales mas el cero.

4.1 Definición :

Dado un anillo A, una Serie Formal de Potencias (SFP) sobre A es un elemento de $A^{\mathbb{N}_0}$, es decir, una sucesión indexada por $\mathbb{N}_0$ con elementos en A. El conjunto de series formales de potencias sobre A se denotara $A[[x]]$ y un elemento típico se denota como $F(x)$.

Unas primeras preguntas podrian ser ¿porque se le llama a esto una serie formal de potencias? ¿Donde estan las potencias? ¿Donde esta la serie?

Los elementos de A los miramos dentro de $A[[x]]$ mediante la identificación $a \leftrightarrow (a, 0, 0, ...)$, donde 0 denota el neutro de la suma de A. Demosle ahora una estructura de anillo a $A[[x]]$:

4.2 Definición :
Dadas SFPs $F(x) = (a_0, a_1, ...)$ y $G(x) = (b_0, b_1, ...)$, definimos la suma y el producto de $F(x)$ y $G(x)$

$$(F + G)(x) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ...)$$
$$(FG)(x) = (c_0, c_1, ...)$$

donde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Como siempre, denotamos $F(x).F(x)$ como $F(x)^2$, etc.

4.3 Ejercicio :
Probar que con esas definiciones, $A[[x]]$ es un anillo.

4.4 Notación :
Denotaremos a la sucesión $(0, 1, 0, 0, ..)$ por x. Es decir, $x = (0, 1, 0, 0, ..)$.

4.5 Propiedad :

$$x^2 = (0, 0, 1, 0, ...)$$
$$x^3 = (0, 0, 0, 1, 0, ...)$$
$$\vdots$$

Prueba:

Denotemos por $F_i(x)$ la SFP $(\delta_{0,i}, \delta_{1,i}, ...)$ donde δ es la delta de Kronecker. Sea $(c_0, c_1, ...) = F_i(x)F_j(x)$ Entonces:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \delta_{i,k}\delta_{j,n-k}$$

Los terminos de la suma son todos cero, excepto si $k = i$ y $n - k = j$. Esto solo puede pasar si $n = i + j$, por lo tanto $F_iF_j(x) = F_{i+j}(x)$. Como $F_1(x) = x$, usando inducción sale la propiedad.

QED.

Ahora le daremos a $A[[x]]$ una topologia:

4.6 Definición :

Dadas $F(x) = (a_0, a_1, ...)$ y $G(x) = (b_0, b_1, ...) \in A[[X]]]$, definimos la distancia entre $F(x)$ y $G(x)$ como:

$$d(F(x), G(x)) = \begin{cases} 2^{-k} & \text{donde } k = \min\{n \in I\!N : a_n \neq b_n\} \quad \text{si } F(x) \neq G(x) \\ 0 & \text{si } F(x) = G(x) \end{cases}$$

Es decir, dos SFPs estan "'cerca" si coinciden en los primeros naturales.

4.7 Propiedad :

d es una métrica.

Prueba:

Es obvio que d es simterica y que $d(F(x), G(x)) = 0$ si y solo si $F(x) = G(x)$. Sólo hace falta ver la desigualdad triangular.

Sean $F(x) = (a_0, a_1, ...)$, $G(x) = (b_0, b_1, ...)$ y $H(x) = (c_0, c_1, ...)$. Sea $2^{-k} = d(F(x), G(x))$, $2^{-i} = d(F(x), H(x))$ y $2^{-j} = d(G(x), H(x)$. Entonces, $a_n = b_n\ \forall n \leq k$, y $b_n = c_n\ \forall n \leq j$, lo cual implica que $a_n = c_n\ \forall n \leq \min\{k, j\}$. Como i es el mayor indice con esa propiedad, tenemos que $\min\{k, j\} \leq i$, lo cual implica que $2^{-i} \leq 2^{\min\{k,j\}} < 2^{-k} + 2^{-j}$.

QED.

Con esa distancia, $A[[x]]$ se vuelve un espacio topológico (mètrico, de hecho).

Podemos definir entonces que $F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(x)$ si la sucesión $\sum_{j=0}^{i} F_j(x)$ converje a $F(x)$ cuando $i \to \infty$ y una definiciòn similar para el producto $\prod_{j=0}^{\infty} F_j(x)$.

Esto nos permite, por fin, ver las SFP realmente como series de potencias:

4.8 Propiedad :

Si $F(x) = (a_0, a_1, ...) \in A[[x]]$, entonces $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Prueba:

Observar que $\sum_{n=0}^{i} a_n x^n$ es la sucesión $(a_0, a_1, ..., a_i, 0, 0, 0, ...)$.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} d(\sum_{n=0}^{i} a_n x^n, F(x)) =& d((a_0, a_1, ..., a_i, 0, 0, 0, ...), (a_0, a_1, ..., a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, ...) \\ \leq& 2^{-(i+1)} \to 0 \end{aligned}$$

el ultimo limite cuando $i \to \infty$. Es decir, $\sum_{n=0}^{i} a_n x^n$ converge a $F(x)$.

QED.

4.9 Notación :

$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ no significa que se este evaluando F en x. Es simplemente una comodidad en la notación, y como referencia a las series usuales. Pero por abuso de notación, si $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, se denota a_0 por $F(0)$.

La notación $[x^n]F(x)$ denota el coeficiente a_n.

El menor k tal que $[x^k]F(x) \neq 0$ se llama el "grado" de $F(x)$. Estariamos diciendo que $F_i(x) \to F(x)$ sii el grado de $F_i(x) - F(x)$ tiende a infinito.

En general no tiene sentido "evaluar" $F(x)$ reemplazando x por un elemento de A. Para que esto tuviera sentido, deberiamos tener estructura adicional en A, como una topologia. Aun si esta existiera, la evaluación podría no dar una serie convergente, pero esto es irrelvante: la SFP sigue existiendo y estando alli, aunque no converja para ningun valor de A. En este sentido, las SFP son a las series como los polinomios a las funciones polinomiales: dado un polinomio, se lo puede usar para construir una funcion polinomial que resulta de reemplazar la x por valores concretos, pero dos funciones polinomiales pueden ser iguales sin que los polinomios de origen lo sean (en los reales si, si las funciones son iguales como funciones, los polinomios lo son, pero sobre otros anillos esto no siempre es cierto). Pero uno puede siempre mirar las funciones inducidas sobre A por una SFP. Si la SFP es un polinomio, no hay problema, y si es una SFP propia, solo se puede hacer si A tiene una topologia. En el caso particular de que A sean los reales o complejos, si la función que induce la SFP converje, y se deduce una identidad, entonces esa identidad tambien valdrá en el anillo $A[[x]]$, siempre que tenga sentido en $A[[x]]$. (esto por un teorema de Analisis en el cual se ve que toda serie de potencias (real o compleja) centrada en 0 tiene una representación única como serie de potencias centrada en 0. Asi, en algunos casos se puede ver que dos SFP $F(x)$ y $G(x)$ son iguales, porque las series reales que inducen converjen ambas y son iguales como funciones. Pero no es necesario, en general, preocuparse por cuestiones de convergencia (en los reales) para trabajar con SFPs, sólo es una herramienta mas. Lo que si hay que tener cuidado es que una serie puede converjer sobre los reales PERO NO en $\mathbb{R}[[x]]$: todas las series de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergen en $A[[x]]$, pero eso no significa que todas las series $\sum_{j=0}^{\infty} F_j(x)$ lo hagan, y algunas pueden converger cuando se las mira como funciones sobre $\mathbb{R}$ pero no converger en $\mathbb{R}[[x]]$. Abajo veremos un ejemplo;

Los siguiente que queremos hacer con SFPs es componerlas. Esto no siempre se puede hacer, y necesitamos primero algunas propiedades:

4.10 Propiedad :
Si $F_i(x), F(x) \in A[[x]]$*, entonces:*

$$\lim_{i\to\infty} F_i(x) = F(x) \iff \forall n \in I\!N_0 \exists i_n \text{con } [x^n]F_i(x) = [x^n]F(x) \forall i \geq i_n$$

Prueba:

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty} F_i(x) = F(x) &\iff \forall n \in I\!N \exists i_n | d(F_i(x), F(x)) < 2^{-n} \forall i \geq i_n \\ &\iff \forall n \in I\!N \exists i_n | [x^n]F_i(x) = [x^n]F(x) \forall i \geq i_n\end{aligned}$$

la ultima equivalencia pues: Si $d(F_i(x), F(x)) < 2^{-n}$, entonces debe ser $[x^m]F_i(x) = [x^m]F(x) \forall m \leq n$, por la definición de d, en particular $[x^n]F_i(x) = [x^n]F(x)$. Por otro lado, si es cierto que $\forall n \in I\!N \exists i_n | [x^n]F_i(x) = [x^n]F(x) \forall i \geq i_n$, entonces dado n aplico esta propiedad a los números $0, 1, ..., n$, obteniendo $i_0, i_1, ..., i_n$ tales que $i \geq i_j \Rightarrow [x^j]F_i(x) = [x^j]F(x)$. Tomando k el maximo de los i_j, tenemos que $i \geq k \Rightarrow [x^j]F_i(x) = [x^j]F(x) \forall j = 1, ..., n \Rightarrow d(F_i(x), F(x)) \leq 2^{-(n+1)} < 2^{-n}$.

QED.

4.11 Corolario :
$\{F_i(x)\}_{i\geq 0}$ *converge (a algo) sii* $\forall n \in I\!N_0 \exists i_n \text{con } [x^n]F_i(x) = [x^n]F_j(x) \forall i, j \geq i_n$.

4.12 Propiedad :
Dadas SFPs $F_j(x)$*, entonces:*

a) $\sum_{j=0}^{\infty} F_j(x)$ converge si y solo si $\lim_{j\to\infty} F_j(x) = 0$

b) Si $F_j(0) = 0$, entonces $\prod_{j=0}^{\infty}(1 + F_j(x))$ converge si y solo si $\lim_{j\to\infty} F_j(x) = 0$

Prueba:

a) Si $\sum_{j=0}^{\infty} F_j(x)$ converge $\forall n \exists i_n$ tal que $[x^n](\sum_{j=0}^{i} F_j(x)) = [x^n](\sum_{j=0}^{k} F_j(x)) \forall i, k \geq i_n$. En particular, eso es cierto si $k = i + 1$, con lo cual tenemos que:

$$\sum_{j=0}^{i} [x^n]F_j(x) = \sum_{j=0}^{i+1} [x^n]F_j(x)$$

es decir, simplificando:

$$0 = [x^n]F_{i+1}(x) \forall i \geq i_n$$

Lo cual dice que $F_i(x) \to 0$.

Viceversa, supongamos que $F_i(x) \to 0$. Dado n, sea i_n tal que $[x^n]F_i(x) = 0 \forall i \geq i_n$. Entonces $[x^n]\sum_{j=0}^{k}[x^n]F_j(x) = \sum_{j=0}^{i_n}[x^n]F_j(x) \forall k \geq i_n$, es decir, como el miembro de la izquierda es constante, $[x^n]\sum_{j=0}^{k}[x^n]F_j(x) = [x^n]\sum_{j=0}^{i}[x^n]F_j(x) \forall i,k \geq i_n$, lo cual dice que $\sum_{j=0}^{\infty} F_j(x)$ converge.

b) Ejercicio.

QED.

Como dijimos, SFPs tambien se pueden componer, pero no siempre, y tambien dijimos que series que converjen en $\mathbb{R}$ pueden no hacerlo en $\mathbb{R}[[x]]$. Por ejemplo, definamos $E(x)$ (en $\mathbb{R}[[x]]$) como la SFP $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$. Podriamos querer "componer" E con la SFP $1+x$, es decir, podriamos querer analizar la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+1)^n$ Con series reales, esto por supuesto que tiene sentido, e incluso tenemos la identidad $E(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}x^n$. Pero esto NO ES CIERTO EN $\mathbb{R}[[x]]$: para que la SFP $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+1)^n$ tenga sentido (i.e., converja), deberiamos ver que $\sum_{n=0}^{i} \frac{1}{n!}(x+1)^n$ converge cuando $i \to \infty$. Por la anterior propiedad, esto ocurre si y solo si $\frac{1}{n!}(x+1)^n$ converje a 0. Pero $\frac{1}{n!}(x+1)^n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$, asi pues ya el primer coeficiente es distinto de 0 y por lo tanto $d(\frac{1}{n!}(x+1)^n, 0) = 2^{-0} = 1 \forall n$ y por lo tanto no puede converger a cero.

Pero en algunos casos si podemos componer:

4.13 Propiedad :

Sean $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *y* $G(x)$ *dos SFPs, con* G *tal que* $G(0) = 0$. *Entonces, la SFP* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n G(x)^n$ *es convergente.*

Prueba:

Si $G(x) = 0$, la propiedad es obvia. Si no, probemos el siguiente lema: si $d(G(x), 0) = 2^{-k}$ y $d(H(x), 0) = 2^{-j}$, entonces $d(G(x)H(x), 0) = 2^{-(k+j)}$. Esto pues si $G(x) = \sum_n b_n x^n$ y $H(x) = \sum_n c_n x^n$, entonces la hipotesis sobre las distncias a 0 de G y H implican que $b_0 = b_1 = ... = b_{k-1} = 0$ y $c_0 = c_1 = ... = c_{j-1} = 0$. Sea $GH(x) = \sum_n d_n x^n$. Por definición de producto, $d_n = \sum_{i=0}^{n} b_i c_{n-i}$. Esto y lo anterior impican que si $n < k+j$, entonces en esa suma todos los terminos son nulos. Por lo tanto, $d(GH(x), 0) \geq 2^{-(k+j)}$.

Una vez que tenemos el lema, vemos entonces que $d(G(x)^n, 0) = 2^{-nk}$ y por lo tanto tiende a cero cuando $n \to \infty$, lo cual prueba que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n G(x)^n$ es convergente.

QED.

Nota: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n G(x)^n$ se denota por abuso de notación como $F(G(x)))$.

Otra cosa que necesitaremos es saber cuando existe la inversa (multiplicativa) de una SFP.

4.14 Propiedad :

$F(x)$ tiene inversa (i.e. $\exists$ SFP $G(x)$ tal que $F(x)G(x) = 1$) si y solo si $F(0)$ es invertible en A.

Prueba:

Si $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ y $G(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$, entonces $F(x)G(x) = 1$ implica en particular que $a_0 b_0 = 1$ por lo tanto $F(0) = a_0$ es invertible en A.

Veamos ahora la reciproca. Como $a_0 = F(0)$ es inversible en A, definamos b_0 como igual a su inversa. Suponiendo que hemos definido inductivamente $b_0, b_1, ..., b_{n-1}$, definamos:

$$b_n = -b_0. \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$$

Entonces, vemos que para todo n,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} &= a_0 b_n + \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} \\ &= a_0(-b_0. \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}) + \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} \\ &= 0\end{aligned}$$

Definiendo $G(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ tenemos entonces que $F(x)G(x) = 1$.

QED.

4.15 Ejemplo :

$F(x) = 1 + x + x^2 + ...$ es invertible y su inversa es $1 - x$.

$F(x)$ es invertible pues $F(0) = 1$ es invertible. Mas aun, si $F(x)(1-x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, tenemos que $a_0 = 1.1 = 1$, $a_1 = 1.(-1) + 1.1 = 0$, y en general, $a_n = 1.1 + 1.(-1) + 1.0 + ... + 0 = 1.1 - 1.1 = 0$, por lo tanto $F(x)(1 - x) = 1$.

Por lo tanto, denotaremos a $1 + x + x^2 + ...$ como $(1 - x)^{-1}$ o $\frac{1}{1-x}$.

Ademas, como la SFP $G(x) = x^i$ satisface $G(0) = 0$ si $i > 0$, tenemos que podemos componer F con$G$, y podemos escribir $1 + x^i + x^{2i} + ... = \frac{1}{1-x^i}$.

5. Un teorema importante y varios corolarios

En esta sección probaremos un teorema bastante general que permite relacionar SFPs relacionadas con diversas particiones con productos infinitos.

En general, queremos restringir las partes de una partición. Por ejemplo, recordemos que $p_e(n)$ es el número de particiones de n con todas las partes pares. En general, podriamos tomar un subconjuento H de $I\!N_0$, y trabajar con particiones cuyas partes deben estar en H. (a esto lo denotaremos en general $p_H(n)$. Pero esto por ejemplo no nos ayudaria cuando queremos mirar por ejemplo, las particiones que tengan partes distintas: en ese caso, una parte puede ser cualqueir cosa, siempre que no se repita.

Para trabajar de la forma mas general posible, debemos tomar subconjuntos S_i de $I\!N_0$, y trabajar con aquellas particiones tales que la cantidad de veces que una parte es i es un número en S_i. Especifiquemos la notación antes de seguir:

5.1 Notación :

1) Dada una partición λ de n, definimos $\alpha_i(\lambda)$ = número de partes de λ que son iguales a i.

2) Dados S_i subconjuntos de $I\!N_0$, $i = 1, .., $ denotamos $\vec{S} = (S_1, S_2, ...)$ y definimos $p^{\vec{S}}(n) = \#\{\lambda \vdash n | \alpha_i(n) \in S_i\}$.

Por ejemplo, cuando $S_i = I\!N_0$, tenemos $p^{\vec{S}}(n) = p(n)$, porque no restrinjimos las particiones. Tomando $S_i = \{0, 1\}$, tenemos $p^{\vec{S}}(n) = q(n)$, porque en este caso cada parte que aparezca lo debe hacer una sola vez.

Si definimos, dado $H \subseteq I\!N_0$:

$$S_i = \begin{cases} I\!N_0 & \text{si } i \in H \\ \{0\} & \text{si no} \end{cases}$$

entonces $p^{\vec{S}}(n) = p_H(n)$, etc.

Enunciemos el teorema que queremos probar:

5.2 Teorema :
Dado $\vec{S} \in P(I\!N_0)^{I\!N}$, la función generatriz de $p^{\vec{S}}$ es:

$$\sum_{n \geq 0} p^{\vec{S}}(n) x^n = \prod_{i \geq 1} \sum_{j \in S_i} x^{ij}$$

Prueba:

Si desarrollamos el producto $\prod_{i \geq 1} \sum_{j \in S_i} x^{ij}$ tendremos una suma de terminos de la forma x^{algo}. Si agrupamos los terminos con el mismo exponente, tendremos una suma $\sum_{n \geq 0} a_n . x^n$ donde debemos calcular el coeficiente a_n. Ahora bien,un termino general x^n

en el desarrollo de $\prod_{i\geq 1}\sum_{j\in S_i} x^{ij}$, fue creado tomando, para cada i, un j_i de la suma $\sum_{j\in S_i} x^{ij}$. Por lo tanto n es igual a $1.j_1 + 2.j_2 + ...$ Por lo tanto el coeficiente a_n sera igual al nùmero de formas de elejir los j_i de forma tal que $n = 1.j_1 + 2.j_2 + ...$ Pero en este caso tenemos una particion λ de n. Esa particion tiene j_1 partes iguales a 1, j_2 partes iguales a 2, etc. Es decir, $\alpha_i(\lambda) = j_i$ Pero por la elecciòn de j_i, tenemos que $j_i \in S_i$, es decir, $\alpha_i(\lambda) \in S_i \forall i$, por lo tanto λ es una de las particiones que esta contando $p^{\vec{S}}$. Viceversa, cada una de tales particiones nos da una elección adecuada de los j_i, por lo tanto $a_n = p^{\vec{S}}$.

QED.

5.3 Corolario :

(Euler)

$$\prod_{i\geq 1}\frac{1}{1-x^i} = \sum_{n\geq 0} p(n)x^n$$

Prueba:

Tomando $S_i = I\!N_0$ para todo i, $p^{\vec{S}}(n) = p(n)$, puesto que no hay restricciones en las particiones. Por **5.2.** , tenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} p(n)x^n &= \prod_{i\geq 1}\sum_{j\in S_i} x^{ij} \\ &= \prod_{i\geq 1}\sum_{j\geq 0} x^{ij} \qquad (\text{pues } S_i = I\!N_0) \\ &= \prod_{i\geq 1}(1 + x^i + (x^i)^2 + (x^i)^3 + ...) \\ &= \prod_{i\geq 1}\frac{1}{1-x^i}\end{aligned}$$

QED.

5.4 Corolario :

$$\prod_{i\geq 1}(1+x^i) = \sum_{n\geq 0} q(n)x^n$$

Prueba:

Tomando $S_i = \{0,1\}$, tenemos $p^{\vec{S}} = q$, y por **5.2.** , tenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} q(n)x^n &= \prod_{i\geq 1}\sum_{j\in S_i} x^{ij} \\ &= \prod_{i\geq 1}\sum_{j=0}^{1} x^{ij} \\ &= \prod_{i\geq 1}(1+x^i)\end{aligned}$$

QED.

5.5 Corolario :

Si $H \subseteq I\!N$, entonces:

$$\sum_{n\geq 0} p_H(n) = \prod_{i\in H}\frac{1}{1-x^i}$$

(observar que **5.3.** es un caso particular, con $H = I\!N$)

Prueba:

Esencialmente la misma que **5.3.** , solo que en este caso, cuando hacemos $\sum_{j\in S_i} x^{ij}$ esto va a ser igual a $1 + x^i + (x^i)^2 + (x^i)^3 + ... = \frac{1}{1-x^i}$ si $i \in H$, pues en ese caso $S_i = I\!N_0$, pero si $i \notin H$, entonces $S_i = \{0\}$ y la suma queda: $\sum_{j\in S_i} x^{ij} = x^0 = 1$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} p_H(n)x^n &= \prod_{i\geq 1}\sum_{j\in S_i} x^{ij} \\ &= \prod_{i\in H}\frac{1}{1-x^i}\end{aligned}$$

QED.

5.6 Corolario :

$$\sum_{n\geq 0} p_e(n) = \prod_{j\geq 1}\frac{1}{1-x^{2j}}$$

$$\sum_{n\geq 0} p_o(n) = \prod_{j\geq 1}\frac{1}{1-x^{2j-1}}$$

Prueba:

En este caso, es H = pares en un caso (y H= impares en el otro caso), con lo cual sale directo de **5.5.** .

QED.

Observemos que si componemos el resultado de **5.3**. con x^2, es decir, en la ecuación $\sum_{n\geq 0} p(n)x^n = \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-x^i}$ reemplazamos x por x^2, obtenemos:

$$\sum_{n\geq 0} p(n)x^{2n} = \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-x^{2i}} = \sum_{n\geq 0} p_e(n)$$

de lo cual deducimos que

$$p_e(n) = \begin{cases} p(\frac{n}{2}) & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

. Por supuesto, esto lo podriamos haber obtenido directamente dividiendo todas las partes por 2, asi que solo estamos probando analiticamente algo mas o menos obvio. El siguiente resultado no es tan directo: fue uno de los teoremas que Euler probó relativo a particiones y relaciona particiones que en principio no tienen nada que ver entre si:

5.7 Corolario :

$$q(n) = p_0(n)$$

Prueba:

$(1+x^i)(1-x^i) = (1-x^{2i})$ por lo tanto

$$\prod_{i\geq 1}(1+x^i) = \prod_{i\geq 1} \frac{1-x^{2i}}{1-x^i}$$

y por lo tanto los terminos en el numerador van cancelando todos los terminos del denominador que sean pares, por lo que:

$$\prod_{i\geq 1}(1+x^i) = \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-x^{2i-1}}$$

y entonces obtenemos el resultado por **5.4.** y **5.6.** .

QED.

Por ejemplo, recordemos que habiamos visto que $p_o(5) = 3$ (particiones $5 = 5$, $5 = 3+1+1$ y $5 = 1+1+1+1+1$) y tambien $q(5) = 3$. (particiones $5 = 5$, $5 = 4+1$ y

$5 = 3 + 2$). Otro ejempplo: $p_o(7) = 5$ (particiones $7, 5 + 1 + 1, 3 + 3 + 1, 3 + 1 + 1 + 1 + 1$ y $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$) y $q(7) = 5$ (particiones $7, 6 + 1, 5 + 2, 4 + 3$ y $4 + 2 + 1$).

Se puede dar una prueba no analitica, pero no es obvia: dada una partición λ en partes impares, se construye una partición λ^* con partes distintas requiriendo que la parte $t2^k$, con t impar, aparece en λ^* si y solo si $\alpha_t(\lambda)$ al expandirse en binario contiene la potencia 2^k. Dejo como ejercicio para el lector llenar todos los detalles de que $\lambda \mapsto \lambda^*$ es una biyección. (un ejercicio que tuve que hacer cuando era estudiante y no deseo repetir aca).

Un último ejemplo: calcular el producto $\prod_{i=1}^{\infty}(1 + x^{2^i})$.

Si denotamos por H el conjunto de naturales que son potencia de 2, tenemos que $\prod_{i=1}^{\infty}(1 + x^{2^i}) = \prod_{i \in H}(1 + x^i)$. Definamos entonces

$$S_i = \begin{cases} \{0, 1\} & \text{si } i \text{ es una potencia de 2} \\ \{0\} & \text{si no} \end{cases}$$

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{\infty}(1 + x^{2^i}) &= \prod_{i \in H}(1 + x^i) \\ &= \prod_{i=1}^{\infty}(\sum_{j \in S_i} x^{ij}) \\ &\overset{\mathbf{5.2.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} p^{\vec{S}}(n) x^n \end{aligned}$$

Debemos calcular $p^{\vec{S}}(n)$, que en este caso es igual al número de particiones de n con todas sus partes sin repetir y que sean potencias de 2. Pero n tiene una sóla tal partición (la expansión binaria de n), por lo tanto $p^{\vec{S}}(n) = 1 \forall n$ y entonces tenemos que:

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1 + x^{2^i}) = 1 + x + x^2 + ... = \frac{1}{1 - x}$$

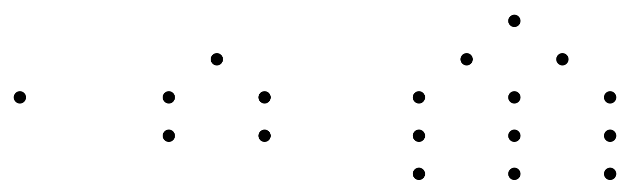
Observemos que enb este ejemplo expresamos el producto como una serie cuyos coeficientes contaban ciertas particiones, y luego calculamos esos números por medios combinatorios directos. Esta es la misma idea que encontraremos en el siguiente teorema:

6. El teorema Pentagonal de Euler

En eta sección queremos probar una formula de recurrencia para $p(n)$. Para hacerlo, tambien daremos la formula de expansión del producto $\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)$. El resultado principal es la extraordinaria formula:

$$p(n) = p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)-p(n-7)+p(n-12)+p(n-15)-p(n-22)-p(n-26)+...$$

¿Cual es el significado de los números $1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, ...$ que aparecen en esta recurrencia? Observemos que los podemos agrupar de a pares: 1,2 5,7 12,15 22,26, etc. El segundo elemento del m-esimo par es m unidades mayor que el primer elemento. Nos podemos concentrar en los primeros elementos: 1,5,12,22,.... . Estos números tienen la siguiente representación geometrica:



etc. Observemos que el m-ésimo pentagono tiene una base cuadrada de lado m, con un triangulo encima con lineas $m-1$, $m-2$,...,1. Por lo tanto, el m-ésimo pentagono tiene la siguiente cantidad de puntitos:

$$m^2 + \frac{(m-1)m}{2} = \frac{3m^2 - m}{2} = \frac{1}{2}m(3m-1)$$

Los números 1,2,5,7,12,15,22,26, etc son precisamente los números $\frac{1}{2}m(3m \pm 1)$ con $m = 1, 2, ...$ y por eso se llaman "números pentagonales". Extendemos la definición para incluir a $0 = \frac{1}{2}0(3.0-1)$.

Podemos enunciar entonces:

6.1 Formula Pentagonal de Euler :
Sea

$$\heartsuit_k = \begin{cases} (-1)^m & \text{si } k = \frac{1}{2}m(3m \pm 1) \text{ para algún } m \geq 0. \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} p(n) &= -\sum_{k=1}^{n} p(n-k)\heartsuit_k \\ &= p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - p(n-22) - ... \end{aligned}$$

Prueba:

Puesto que $\heartsuit_0 = (-1)^0 = 1$, esto es equivalente a ver que $\sum_{k=0}^{n} p(n-k)\heartsuit_k = 0$ Sea $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$ y sea $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \heartsuit_n x^n$. Lo que queremos probar entonces es que $P(x)Q(x) = 1$. como sabemos por **5.3.** que $P(x) = \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-x^i}$, entonces lo que queremos probar en realidad es:

6.2 Teorema :

(Teorema pentagonal de Euler)

$$\begin{aligned}\prod_{i\geq 1}(1-x^i) =& \sum_{n=0}^{\infty} \heartsuit_n x^n \\ =& 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - ....\end{aligned}$$

(Observemos que sabemos por **5.4.** que $\prod_{i\geq 1}(1+x^i) = \sum_{n\geq 0} q(n)x^n$. El reemplazo de $+$ por $-$ cambia $q(n)$ por $\heartsuit_n$). Tenemos que:

$$\begin{aligned}\prod_{i\geq 1}(1-x^i) =& \sum_{j_1=0}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}\sum_{j_3=0}^{1} ...(-1)^{j_1+j_2+....} x^{j_1+2j_2+3j_3+....} \\ =& \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{\substack{j_1, j_2, ... \\ n = j_1+2j_2+3j_3+....}} (-1)^{j_1+j_2+....} \right) x^n \quad (\star)\end{aligned}$$

La ecuación $n = j_1 + 2j_2 + 3j_3 + ...$ se puede ver (cuando $n \geq 1$), como siempre, como una partición λ de n tal que $\alpha_i(\lambda) = j_i$. Como j_i puede ser solo 0 o 1, estamos diciendo que las partes son todas distintas. Entonces $(\star)$ se puede reescribir como

$$\prod_{i\geq 1}(1-x^i) = 1 + \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \text{tiene} \\ \text{partes distintas}}} (-1)^{\alpha_1(\lambda)+\alpha_2(\lambda)+....} \right) x^n$$

Ahora bien, $\alpha_1(\lambda) + \alpha_2(\lambda) + ... =$ (número de partes igual a 1)+(número de partes igual a 2)+...= número de partes de λ. Por lo tanto:

$$(-1)^{\alpha_1(\lambda)+\alpha_2(\lambda)+....} = \begin{cases} 1 & \text{si el número de partes de } \lambda \text{ es par.} \\ -1 & \text{si no} \end{cases}$$

asi que:

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \text{tiene} \\ \text{partes distintas}}} (-1)^{\alpha_1(\lambda)+\alpha_2(\lambda)+\dots} = q^e(n) - q^o(n)$$

donde $q^e(n)$ es el número de particiones de n en un número par de partes distinas y $q^o(n)$ es lo mismo pero reemplazando par por impar. Asi pues:

$$\prod_{i\geq 1}(1-x^i) = 1 + \sum_{n\geq 1}(q^e(n)-q^o(n))x^n$$

Por lo tanto, para terminar la prueba del teorema basta con probar:

6.3 Teorema :

$$q^e(n) - q^o(n) = \heartsuit_n$$

Prueba:

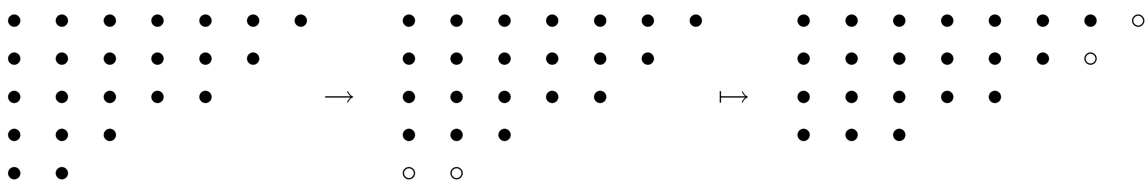
Dada una partición $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_r)$ con partes distintas $\lambda_1 > ... > \lambda_r$, sea $s(\lambda) = \lambda_r$ (i.e., la parte mas chica). Ademas, como las partes son distintas, habra un indice i tal que $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_i$ formen una sucesión de enteros consecutivos. (i.e., $\lambda_2 = \lambda_1 - 1, \lambda_3 = \lambda_2 - 1, ..., \lambda_i = \lambda_{i-1} - 1$, pero $\lambda_{i+1} < \lambda_i - 1$). A ese indice i le llamamos $\sigma(\lambda)$. Graficamente tenemos:

$$\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{cccccccccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & & & & & \iddots & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & &
\end{array}\right\} \sigma(\lambda) \\
\begin{array}{cccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & &
\end{array}
\end{array}$$

Definamos la siguiente función $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}$ entre particiones. Para ellos, dividamos las particiones en partes distintas en dos tipos: tipo I seran las particiones con $s(\lambda) \leq \sigma(\lambda)$ y tipo II las otras. Definiremos $\tilde{\lambda}$ en forma distinta según sea de un tipo u otro.

En las particiones de tipo I, como $s(\lambda) \leq \sigma(\lambda)$, entonces eliminamos la ultima parte de λ y le sumamos una unidad a cada una de las primeras $s(\lambda)$ partes de λ.
Por ejemplo, si $\lambda = (10, 9, 8, 7, 5, 4, 3)$, tenemos $s(\lambda) = 3$, $\sigma(\lambda) = 4$ y $\tilde{\lambda} = (11, 10, 9, 7, 5, 4)$.

Veamos un ejemplo pictorial: con $\lambda = (7, 6, 5, 3, 2)$:



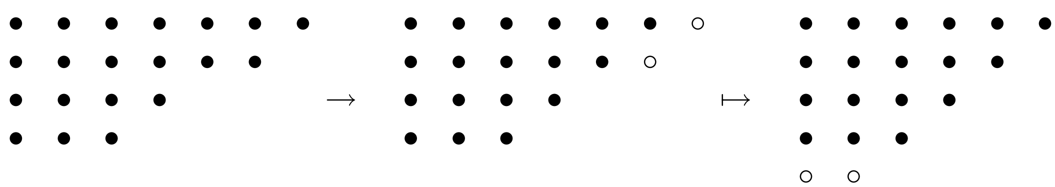
obtenemos $\tilde{\lambda} = (8, 7, 5, 3)$.

Observar que al sumar 1 a cada una de $s(\lambda)$ partes, pero no a las siguientes, se produce un salto de al menos dos entre la $s(\lambda)$-parte y la siguiente, por lo tanto $\sigma(\tilde{\lambda}) = s(\lambda) < s(\tilde{\lambda})$ porque borramos la ultima parte. Asi, si λ es de tipo I, $\tilde{\lambda}$ es del tipo II.

Veamos como definir $\tilde{\lambda}$ en las particiones de tipo II:

Si λ es de tipo II: $s(\lambda) > \sigma(\lambda)$, entonces le restamos una unidad a cada una de las primeras $\sigma(\lambda)$ partes, y formamos una nueva parte de tamaño $\sigma(\lambda)$. Como estamos en el caso $s(\lambda) > \sigma(\lambda)$ esta nueva parte sera estrictamente mas chica que la menor parte que habia, por lo tanto seguira siendo una partición con partes distintas.

Por ejemplo, si $\lambda = (7, 6, 4, 3)$ entonces $\sigma(\lambda) = 2$ y $s(\lambda) = 3$ y tenemos que $\tilde{\lambda} = (6, 5, 4, 3, 2)$. Pictorialmente:



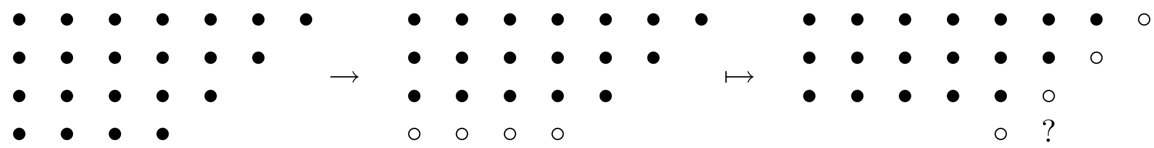
Otro ejemplo: si $\lambda = (11, 10, 9, 7, 5, 4)$, entonces $\sigma(\lambda) = 3 < 4 = s(\lambda)$ y $\tilde{\lambda} = (10, 9, 8, 7, 5, 4, 3)$.

Vemos que en este caso $\sigma(\tilde{\lambda}) \geq s(\tilde{\lambda})$ asi que caemos ahora en el tipo I.

Es decir, esta función manda particiones de tipo I en particiones de tipo II y viceversa, y ademas, tenemos una involución, es decir, $\tilde{\tilde{\lambda}} = \lambda$

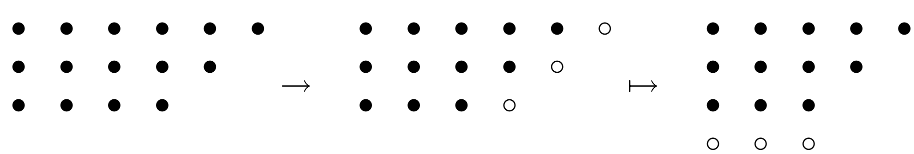
Ademas, como $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}$ suma o resta una parte, cambia la paridad del número de partes. Por lo tanto, esto parecería probar que hemos obtenido una biyección del conjunto de particiones en un número par de partes distintas en el conjunto de particiones en un número impar de partes distintas. Pero en realidad no: el mapa $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}$ NO esta bien definido en algunos casos. ¿cuales son esos casos? Supongamos por ejemplo que $s(\lambda) = \lambda_r$ y que $\sigma(\lambda) = r$ y que estemos en el primer caso, es decir $\lambda_r \leq r$. Debemos borrar la ultima parte y sumar uno a cada una de las primeras λ_r partes. Supongamos adicionalmente que $\lambda_r = r$. Entonces, cuando le queremos sumar uno a la r-esima parte, vemos que no podemos, porque la acabamos de borrar.

Por ejemplo, la partición $\lambda = (7, 6, 5, 4)$. En este caso, al borrar la ultima parte, no podemos agregarle una unidad a la r-esima parte, PORQUE YA NO ESTÁ.



Ahora bien, este caso SOLO puede pasar si la ultima parte esta dentro de las partes contadas por σ Y si la ultima parte es igual a σ. Es decir, si $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_r)$, debe pasar $\sigma(\lambda) = r = \lambda_r$. Como debemos tener $\lambda_2 = \lambda_1 - 1$,$\lambda_3 = \lambda_2 - 1$,... $\lambda_r = \lambda_{r-1} - 1$, debe ser entonces $\lambda = (2r - 1, 2r - 2, ..., r + 1, r)$ y por lo tanto $n = \lambda_1 + ... + \lambda_r = \frac{(2r-1+r)r}{2} = \frac{1}{2}r(3r - 1)$ que es un número pentagonal. Entonces, en este caso, hay exactamente UNA partición mas de tipo I que de tipo II. La partición tiene r partes, por lo tanto $q^e(n) - q^o(n)$ sera 1 si r es par y -1 si r es impar, es decir, $q^e(n) - q^o(n) = (-1)^r = \heartsuit_n$ en este caso.

Hay otro caso mas en el cual $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}$ no puede aplicarse a una partición. En el caso II, habiamos dicho que como la nueva parte creada es igual $\sigma(\lambda)$ y en el caso II $\sigma(\lambda) < s(\lambda)$, que era la menor parte anterior, entonces la nueva parte es estrictamente menor que la anterior y seguimos teniendo una partición en partes distintas. Esto es cierto SIEMPRE QUE NO HAYAMOS CAMBIADO LA ULTIMA PARTE. Es decir, si $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_r)$ y $\sigma(\lambda) = r$, entonces al restarle 1 a cada una de las primeras r partes, tambien le estamos restando a la ultima parte. Si esa ultima parte era $r + 1$, entonces al restarle uno queda r, que es igual a la nueva parte que construimos y NO nos queda una partición con partes distintas. Por ejemplo, con $\lambda = (6, 5, 4)$:



Este caso solo puede pasar si $\sigma(\lambda) = r$ y $\lambda_r = r + 1$, asi $\lambda = (2r, 2r - 1, ..., r + 1)$ y $n = \frac{(2r+r+1)r}{2} = \frac{1}{2}r(3r + 1)$, otra vez, un número pentagonal. Al igual que en el caso anterior, esto da una partición extra, (esta vez de tipo II), con r partes, por lo tanto $q^e(n) - q^o(n) = (-1)^r = \heartsuit_n$.

QED.