Ejemplo de que el algoritmo de Ford y Fulkerson puede no terminar nunca.

Sea N el siguiente network:

vertices: $s, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 y_3, t$

lados: $\overrightarrow{st}$, $\overrightarrow{sx_i}, \overrightarrow{x_i y_i}, \overrightarrow{y_i t}, i = 1, 2, 3,$

Todos los lados entre los x_i:

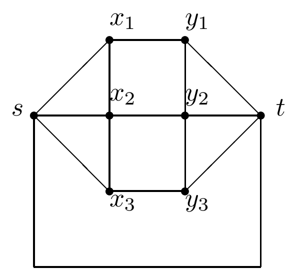
$\overrightarrow{x_1 x_2}$, $\overrightarrow{x_2 x_3}$, $\overrightarrow{x_3 x_1}$, etc

Todos los lados entre los y_i:

$\overrightarrow{y_1 y_2}$, $\overrightarrow{y_2 y_3}$, $\overrightarrow{y_3 y_1}$, etc

(solo mostramos los lados $\overrightarrow{x_1 x_2}$, $\overrightarrow{x_2 x_3}$,

y similar para y, pero imaginen a todos)



Las capacidades son todas 3, excepto los lados $x_i y_i$, con capacidades $1, r, r^2$, respectivamente, donde r es la raiz positiva de la ecuacion $r^2 = 1 - r$ (es decir, $r = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \simeq 0,618....$

(1) De la ecuación $r^2 = 1 - r$ se deduce facilmente que $r^{j+2} = r^j - r^{j+1}$ para todo j.
(2) Ademas, como $1 > r$, tenemos que $1 > r > r^2 > ... > 0$
(3) Corramos F-F con los siguientes caminos:
   (a) En la primera iteración, hacemos $sx_1y_1t : 1$. En los tres lados $x_i y_i$ las capacidades residuales quedan $0, r, r^2$. (la capacidad residual es la diferencia entre la capacidad real y el flujo mandado por el lado)
   (b) En la segunda iteracion de F-F hacemos $sx_3y_3\overleftarrow{y_1x_1}x_2y_2t : r^2$, dejando capacidades residuales de los lados $x_i y_i$ iguales a $r^2, r^3, 0$. (la capacidad residual del lado $\overrightarrow{x_2 y_2}$ es igual a $r - r^2 = r^3$ por (1). El camino no tiene problemas, porque por (2), r^2 es la menor capacidad de entre todas las encontradas)
   (c) En general, supongamos que las capacidades residuales de los lados $x_i y_i$ son $0, r^j, r^{j+1}$ (en algun orden), entonces se puede mandar r^{j+1} unidades de flujo, comenzando en s, llendo hacia el x_i tal que $x_i y_i$ tiene capacidad residual r^{j+1}, llendo hacia el y_k tal que el $x_k y_k$ este saturado, devolviendo flujo por el, y luego llegando a t por el lado que queda. Luego de hacer esto las capacidades residuales son:
      (i) En el lado que tenia 0, queda r^{j+1}, porque devolvimos ese flujo.
      (ii) En el lado que tenia r^{j+1}, queda 0.
      (iii) En el lado que tenia r^j, queda $r^j - r^{j+1} = r^{j+2}$. (por (1))

   Por lo tanto, las capacidades residuales son $0, r^{j+1}, r^{j+2}$ (en algun orden), y entonces es claro que podemos seguir esa secuencia de pasos infinitamente.
(4) Mas aun, los valores parciales del flujo NO convergen al valor del flujo maximal:
   (a) La sucesion de valores parciales del flujo converge a 2:
      (i) Al ser $r < 1$, la serie $\sum_{j=0}^{\infty} r^j$ es convergente y su valor es $\frac{1}{1-r}$.
      (ii) Pero $(r + 2)(1 - r) = r + 2 - r^2 - 2r = -r^2 - r + 1 + 1 = 0 + 1 = 1$, por lo tanto $\frac{1}{1-r} = r + 2$.
      (iii) Usando (i) y (ii), obtenemos que la sucesion de valores parciales del flujo converge a $1 + r^2 + r^3 + ... = \sum_{j=0}^{\infty} r^j - r = r + 2 - r = 2$
   (b) Sin embargo, el valor del flujo maximal es 5, pues:
      (i) El corte $S = \{s, x_1, x_2, x_3\}$ tiene capacidad igual a:

$c(\overrightarrow{st}) + c(\overrightarrow{x_1y_1}) + c(\overrightarrow{x_2y_2}) + c(\overrightarrow{x_3y_3}) = 3 + 1 + r + r^2 = 3 + 1 + 1 = 5$ (la penultima igualdad pues $r + r^2 = 1$).

(ii) Cualquier otro corte tiene capacidad al menos 6, pues:

(A) Si alguno de los x_i no esta, la capacidad es al menos $c(\overrightarrow{st}) + c(\overrightarrow{sx_i}) = 3 + 3 = 6$

(B) Si estan los x_i pero hay algun y_j, la capacidad es al menos $c(\overrightarrow{st})+c(\overrightarrow{y_jt}) = 3 + 3 = 6$.

(iii) Concluimos que S es corte minimal, y por el MaxFlowMinCut theorem, el flujo maximal tiene valor 5.

(c) (a) y(b) prueban nuestra afirmación.