MATEMATICA DISCRETA II-2007, Práctico 1

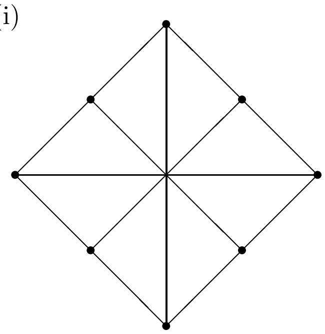
(1) En una parte de un programa en assembler, aparecen seis variables. Variable A debe ser guardada en los pasos 1 a 4, variable B debe ser guardada en los pasos 3 a 6, variable C debe ser guardada en los pasos 4 a 9, variable D debe ser guardada en los pasos 6 a 9, variable E debe ser guardada en los pasos 8 y 9, y variable F debe ser guardada en los pasos 9 y 10.

¿Cuantos registros se necesitan para guardar las variables de esta parte del programa?
¿cuantos serian necesarios si C solo debe ser guardada en los pasos 4 a 8?

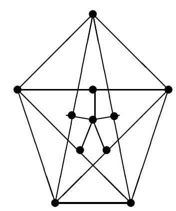
(2) Para $r \geq 2$, el grafo M_r se obtiene del grafo C_{2r} agregando las aristas que unen vértices opuestos. Hallar $\mathcal{X}(M_r)$. (Deberá distinguir entre los casos r par e impar, y entre los casos $r > 2$ y $r = 2$.

(3) Encuentre una coloración de los siguientes grafos e indique si puede, el número cromático respectivo:

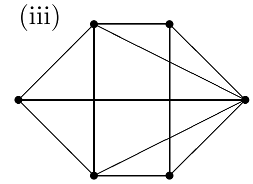
(i)



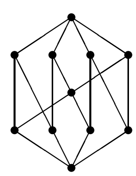
(ii)



(iii)



(iv)



(4) El grafo de Petersen viene dado por la siguiente lista de adyacencia:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
b	a	b	c	d	a	b	c	d	e
e	c	d	e	a	h	i	j	f	g
f	g	h	i	j	i	j	f	g	h

Calcular el numero cromatico del grafo de Petersen.

(REPASO DE DFS Y BFS)

(5) Sea G el grafo definido por la siguiente lista de adyacencia:

a	b	c	d	e	f	g	h
b	a	b	a	b	g	c	a
d	c	d	b			f	g
h	d	g	c			h	
	e						

a) Use el metodo DFS en G empezando por g. (A partir de alli, cada vez que una elección sea posible, elija por orden alfabetico).

b) ¿Es G conexo?

c) Idem que a) pero empezando en c.
d) Idem que a) pero usando el metodo BFS.
e) Idem que c) pero usando el metodo BFS.

(6) Repetir el ejercicio anterior con el grafo dado por:

a	b	c	d	e	f	g	h	i
e	d	e	b	a	c	b	b	a
i	g	f	g	c	e	d	d	c
	h	i	h	f	i			f

(7) Sea v un vertice del grafo completo K_n. Calcular la altura de los arboles DFS y BFS de K_n con raiz en v.

(8) Repetir el ejercicio anterior para el ciclo C_n.

(continua coloreo)

(9) Pruebe que para todo grafo se puede encontrar un orden de los vértices tal que el algoritmo greedy requiera una cantidad de colores igual al número cromático del grafo.

(10) En el teórico, vimos un ejemplo de un grafo bipartito para el cual el greedy no funciona: un grafo bipartito con n vertices de forma tal que el greedy necesita $n/2$ colores. (con n par).

a) Dé un ejemplo de un grafo bipartito donde el greedy necesite $(n+1)/2$ colores (con n impar).

b) Dé un ejemplo de un grafo bipartito donde el Greedy use $(n+2)/2$ colores (con n par).

(11) Sea $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ la secuencia de grados de G. Sea k el mayor natural para el cual $k \leq d_k + 1$. Entonces, $\mathcal{X}(G) \leq k$. (Ayuda: Greedy). (otra forma de describir este ejercicio es : "si k es tal que hay a lo sumo k vertices de grado mayor o igual que k, entonces $\mathcal{X}(G) \leq k$").

(12) Pruebe que si n es la cantidad de vertices de un grafo G, entonces $\mathcal{X}(G)\mathcal{X}(\overline{G}) \geq n$.

(Ayuda: si $C_1, ..., C_t$ son las clases de coloreo de G, entonces para todo i, todos los elementos de C_i deben tener colores distintos en cualquier coloreo de $\overline{G}$. Es decir, $\mathcal{X}(\overline{G}) \geq |C_i|$ para todo i. Luego sumar sobre i.

(13) Probar que:

$$2\sqrt{n} \leq \mathcal{X}(G) + \mathcal{X}(\overline{G}) \leq n+1$$

(Ayuda para la primera desigualdad: probar primero que $2\sqrt{ab} \leq a+b$ para numeros a, b no negativos, y usar el ejercicio anterior. Para la segunda desigualdad, usar el ejercicio (14) dos veces: para la secuencia de grados de G y para la de $\overline{G}$).

(14) Calcular $\mathcal{X}(G)$, donde $G = (V, E)$ es el grafo dado por:

$V = \{x_1, \ldots, x_8, y_1, \ldots, y_8\}$

$E = \{x_i x_{i+1}\}_{i=1}^{6} \cup \{x_8 x_1\} \cup \{y_i y_{i+1}\}_{i=1}^{6} \cup \{y_8 y_1\} \cup \{x_i y_{j_i}\}_{i=1}^{7}$,

donde $j_i = i/2$ si i es par, $j_i = i$ si $i = 5$ o $i = 7$, y $j_i = i + 5$ si $i = 1$ o $i = 3$.

Repetir el ejercicio, pero ahora suponiendo que $j_i = 3 * i + 4\ \mathcal{MOD}\ 8$ para todo i, donde $\mathcal{MOD}$ es como $\mod$ pero las congruencias se toman en $\{1, \ldots, 8\}$ en vez de en $\{0, \ldots, 7\}$.