Practico 3 de Matematica Discreta II, 2007

(1) Probar que en un network con n vertices hay 2^{n-2} cortes.

(2) Terminar la prueba del teorico de que siempre existe un flujo maximal. (si recuerdan, encontramos una sucesion de flujos g_z con la propiedad de que $\lim_{z\to\infty} v(g_z) = a$, y tal que para todo $r = 1, ..., m$ existen $\ell_r = \lim_{z\to\infty} g_z(e_r)$. Definimos entonces $f(e_r) = \ell_r$. Hay que probar que f es flujo y que $v(f) = a$).

(3) Un flujo es impar si el valor del mismo en cada lado es impar. Similar definicion para flujo par.

a) Si las capacidades de todos los lados son pares, ¿es cierto que todo flujo maximal es par?

b) Si las capacdades son todas pares, ¿es cierto que existe un flujo maximal par?

c) Responder a) y b) cambiando "par" por "impar".

d) Si en un network dado se incrementan las capacidades de todos los lados en una constante k, ¿es cierto que el flujo maximal se incrementa en k unidades? ¿en a lo sumo k unidades?

(4) Supongamos que tenemos un network donde ademas de las capacidades de los lados, los vertices tambien tienen capacidades. Un flujo, ademas de las restricciones en los lados tiene la restricción que el flujo que pasa por un vertice x no puede ser mayor a su capacidad. Se desea hallar un flujo maximal con estas condiciones. Transformar el problema en un problema de Max Flow común.

(5) En la ciudad s hay unos espias que deben llegar a la ciudad t. Se tienen dados varios vuelos entre diversas ciudades, y cada espia debera llegar de s a t combinando uno o mas vuelos intermedios. Se desea que nunca dos espias viajen en el mismo vuelo. (pero si pueden estar temporariariamente en la misma ciudad). Para calcular el numero maximo de espias que se puedan mandar, reformular este problema como un problema de MAX FLOW, construyendo un network apropiado. (este problema se conoce como el problema de los caminos disjuntos por lados: dado un grafo dirigido G y vertices s, t, hallar el mayor numero de caminos de s a t que no se toquen en ningun lado).

(6) Suponga que tiene un network en el cual existen vertices especiales $p_1, p_2, \dots, p_k$ (vertices productores) y vertices especiales $c_1, c_2, \dots, c_r$ (vertices consumidores), cada uno de los cuales tiene asociado un numero. (es decir, el network tiene pesos en los lados y en algunos de los vertices). Los numeros asociados a los p_i's indican la cantidad de productos que pueden producir (la oferta). Los numeros asociados a los c_j's, la cantidad de productos que desean consumir. (la demanda). Se desea determinar si la demanda de los consumidores puede ser satisfecha por la oferta de los productores y , en caso de que no pueda ser satisfecha, se desea saber cuanta demanda puede ser satisfecha. (teniendo en cuenta que los productos deben ser producidos y transportados desde los productores hasta los consumidores).

Transforme este problema en un Max flow problem.

(7) En cada uno de los siguientes networks, (los numeros indican las capacidades), hallar un flujo maximal de s a t y un corte minimal. Luego de realizar los calculos, chequear que el valor del flujo sea igual a la capacidad del corte.

Hacer algunos ejercicios ahora (digamos la mitad) y dejar los otros para repasar para el parcial o el final.

i): $sa:2,\quad sb:2,\quad ac:1,\quad ba:1,\quad bc:2,\quad bd:1,\quad cd:1,\quad ct:2,\quad dt:1$

ii): $sa:20,\quad sb:15,\quad sc:10,\quad ac:4,\quad ad:5,\quad ae:9,\quad ba:4,\quad be:6$
$cd:8,\quad de:25,\quad dt:10,\quad ed:5,\quad et:30$

iii): $sa:10\quad sb:5\quad sc:20\quad ad:20\quad ba:7\quad be:5\quad cb:5\quad ce:10\quad cf:5$
$dt:20\quad ed:1\quad et:10\quad ft:5$

iv): $sa:20\quad sj:10\quad ab:20\quad ah:10\quad bc:20\quad cd:30de:10\quad dg:10\quad di:10$

$ef:10 \quad ek:5 \quad ft:10 \quad gk:10 \quad gm:5 \quad hj:5 \quad hn:4 \quad if:5 \quad im:5$
$j\ell:10 \quad kt:10 \quad \ell b:5 \quad \ell n:4 \quad mt:10 \quad nc:10$

v): $sa:10 \quad sg:10 \quad si:10 \quad ab:10 \quad ak:5 \quad bc:10 \quad cd:30$
$de:20 \quad dj:10 \quad ef:20 \quad eh:10 \quad ft:20$
$gk:10 \quad gm:5 \quad hj:5 \quad hn:4 \quad ib:5 \quad im:5$
$j\ell:10 \quad kc:10 \quad \ell f:5 \quad \ell n:4 \quad mc:10 \quad nt:10$

vi): $sa:4 \quad sg:4 \quad si:4 \quad ab:4 \quad ak:2 \quad bc:4 \quad cd:12$
$de:8 \quad dj:4 \quad ef:8 \quad eh:4 \quad ft:8$
$gk:4 \quad gm:2 \quad hj:2 \quad hn:1 \quad ib:2 \quad im:2$
$j\ell:4 \quad kc:4 \quad \ell f:2 \quad \ell n:1 \quad mc:4 \quad nt:4$

vii): $(s,a):10, \quad (s,c):10, \quad (s,f):20, \quad (s,j):10,$
$(a,b):10, \quad (a,j):5, \quad (b,t):10, \quad (c,d):20,$
$(d,e):20, \quad (e,g):10, \quad (f,h):20,$
$(g,t):10, \quad (h,i):20, \quad (i,c):10, \quad (i,t):10,$
$(j,k):20, \quad (k,t):20,$

viii): $(s,a):5, \quad (s,c):10, \quad (s,f):5, \quad (s,j):10, \quad (s,\tilde{n}):10$
$(a,b):5, \quad (a,i):4, \quad (b,t):5, \quad (c,i):10, \quad (c,k):4$
$(d,e):10, \quad (d,n):5, \quad (e,\ell):10, \quad (f,b):4 \quad (f,h):5,$
$(g,t):10, \quad (h,t):5, \quad (h,k):5, \quad (i,d):10,$
$(j,h):10, \quad (k,m):7, \quad (k,o):3,$
$(\ell,g):10, \quad (m,n):7, \quad (m,g):4, \quad (n,t):10$

ix): $(s,a):10, \quad (s,b):21, \quad (s,c):10$
$(a,e):10, \quad (a,f):9, \quad (b,d):21, \quad (c,\ell):7, \quad (c,m):10$
$(d,a):7, \quad (d,e):7, \quad (d,g):7, \quad (e,g):7,$
$(e,t):10, \quad (f,h):21, \quad (g,i):10, \quad (h,j):21,$
$(i,k):10, \quad (j,k):21, \quad (k,t):31,$
$(\ell,f):5, \quad (\ell,n):7, \quad (m,n):4, \quad (n,f):5$

x): $(s,a):10, \quad (s,c):10, \quad (s,f):5, \quad (s,j):10, \quad (s,\tilde{n}):10$
$(a,b):10, \quad (a,i):4, \quad (b,t):10, \quad (c,i):10, \quad (c,k):4$
$(d,e):10, \quad (d,n):5, \quad (e,\ell):10, \quad (f,b):4 \quad (f,h):5,$
$(g,t):10, \quad (h,t):5, \quad (h,k):5, \quad (i,d):10, \quad (j,h):10, \quad (k,m):7$
$(k,o):3, \quad (\ell,g):10, \quad (m,n):7, \quad (m,g):4, \quad (n,t):10$
$(\tilde{n},m):1, \quad (\tilde{n},o):10, \quad (o,t):10$

xi): $sa:15 \quad sg:15 \quad si:15 \quad ab:15 \quad ak:7 \quad bc:15 \quad cd:45$
$de:22 \quad dj:25 \quad ef:22 \quad eh:15 \quad ft:22$
$gk:15 \quad gm:7 \quad hj:7 \quad hn:10 \quad ib:7 \quad im:7$
$j\ell:25 \quad kc:15 \quad \ell f:16 \quad \ell n:10 \quad mc:15 \quad nt:25$

xii): $sa:15 \quad sg:15 \quad si:15 \quad ab:15 \quad ak:12 \quad bc:15 \quad cd:64$
$de:7 \quad dj:25 \quad ef:7 \quad eh:15 \quad ft:7$
$gk:15 \quad gm:12 \quad hj:12 \quad hn:9 \quad ib:12 \quad im:12$
$j\ell:25 \quad kc:15 \quad \ell f:16 \quad \ell n:9 \quad mc:15 \quad nt:25$

(8) Supongamos que tiene ya dado un flujo maximal. Calcular la complejidad de encontrar un corte minimal a partir del flujo maximal dado.

(9) Modificar el algoritmo Edmonds-Karp de forma tal que corra en dos modos: al principio, que se haga una busqueda "forward", la cual no tiene porque ser necesariamente BFS (se puede poner una busqueda DFS, la cual, en la practica, tiende a llegar a t mas rapido). Luego de que no se puedan realizar mas aumentos "forward", el algoritmo debe cambiar al modo normal de Edmonds-Karp.

(10) Probar que si en el network existen lados (p,q) y (q,p) simultaneamente, entonces hay una diferencia en Edmonds-Karp entre poner la busqueda en $\Gamma^+(p)$ primero y $\Gamma^-(p)$ despues, o hacerlo al reves.

(11) Suponga que tiene un grafo (no dirigido) que representa la red telefonica de un pais. Cada lado tiene una capacidad asociada, que es la mayor cantidad de llamadas que ese lado puede soportar, en cualquier direccion. (Asi, por ejemplo, si el lado xy tiene capacidad 10, puede llevar 10 llamadas, las cuales pueden ser todas desde x a y, o 5 de x a y y 5 de y a x, etc, pero no pueden ir 6 de x a y y 7 de y a x).

Se desea calcular cual es el numero maximo de llamadas que el network puede acarrear entre las localidades s y t. Elabore un algoritmo para resolver este caso. (Ayuda: ejercicio anterior)

(12) Supongamos que se tiene un network en el cual cada lado tiene dos pesos asociados a el: $c_1(x,y)$ y $c_2(x,y)$, con la condicion de que $c_1(x,y) \leq c_2(x,y)$ para todo lado (x,y). La definicion de flujo ahora es modificada pidiendo que $c_1(x,y) \leq f(x,y) \leq c_2(x,y)$ para todo lado (x,y). (las demas condiciones para ser flujo quedan iguales).

(a) Probar que puede no existir un flujo de s a t.

(b) Elaborar un algoritmo que encuentre un flujo maximal de s a t, SI SE CONOCE al menos algun flujo de s a t.

Mas adelante veremos como se puede decidir si existe o no al menos un flujo de s a t.

(13) *Elaborar un algoritmo que modifique el algoritmo de Ford-Fulkerson para que la senda se s a t elegida sea la que sea capaz de incrementar el flujo por la mayor cantidad. (Ayuda: Edmonds-Karp modifica F-F adaptando BFS a sus necesidades. Ud. deberia adaptar Dijkstra a las necesidades de este algoritmo)

(14) ***** Calcule la complejidad del algoritmo dado por Ud. en el paso anterior.