MATEMATICA DISCRETA II-2007
PRACTICO 6: P-NP

I): Probar que $\leq_P$ es transitiva, i.e., que $\pi_1 \leq_P \pi_2$ y $\pi_2 \leq_P \pi_3$ implican que $\pi_1 \leq_P \pi_3$

II): Sea π un problema de decisión. Probar que $\pi \leq_P SAT \Rightarrow \pi \in$ NP. (ie. probar la reciproca del teorema de Cook) (en general, probar que si τ es NP-completo, entonces $\pi \leq_P \tau \Rightarrow \pi \in$ NP)

III): Dado el grafo G con vetices a, b, c, d y lados ac, bc, cd, ad, aplicarle la reduccion polinomial a SAT dada en el teórico.

IV): Un camino Hamiltoniano es un camino que recorre todos los vertices, pasando solo una vez por cada vertice. El problema de decidir si un grafo tiene o no un camino Hamiltoniano entre los vertices x e y (fijos, y dados en la instancia) se llama el problema HAMILTON PATH.

Probar que $HAMILTONPATH \leq_P SAT$.

V): El problema CICLO HAMILTONIANO (HC) es el problema de decidir si un grafo tiene un **ciclo** Hamiltoniano, es decir, un ciclo que pasa por todos los vertices, una sola vez por cada vertice.

Probar que $CICLOHAMILTONIANO \leq_P HAMILTONPATH$ y viceversa.

VI): El Traveling Salesman Problem es el siguente: dado un grafo completo con pesos no negativos en los lados, que representan distancias, hallar un ciclo hamiltoniano tal que la suma de las distancias sea lo mas chica posible. Este no es un problema de decisión. La version "de decisión" de este problema, que llamaremos TSP es: "Dasos un k y un grafo con pesos en los lados, ¿existe un ciclo hamiltoniano de distancia total menor o igual a k?" (observar que k es parte de la instancia).

Probar que $HC \leq_P TSP$.

VII): Dado un grafo G, una clique es un subgrafo completo de G. El problema $k-CLIQUE$ es: "Dado un grafo G,¿existe una clique con k vertices?" Probar que k-CLIQUE $\in$ P para todo k. (ojo: k NO es parte de la instancia, esta fijo. Estamos diciendo que 1-CLIQUE$\in$P, que 2500$-$CLIQUE$\in$P, etc.)

VIII): Escriba cada una de las siguientes expresiones en forma tal que en cada disjunción haya exactamente 3 literales, y de forma la expresion original sea satisfacible si y solo si la segunda lo es, siguiendo la reducción del teórico de SAT a 3-SAT,

a) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_4 \vee x_5)$

b) $(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4 \vee x_5) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x}_5 \vee x_6)$

c) $(x_1 \vee \overline{x}_2) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4) \wedge (x_3) \wedge (\overline{x}_2 \vee x_5) \wedge (x_3 \vee \overline{x}_4 \vee x_6) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4 \vee \overline{x}_5 \vee \overline{x}_6)$

IX): Para cada una de las siguientes conjunciones de disjunciones, modele su satisfacibilidad en terminos de la existencia de un coloreo con 3 colores de algun grafo apropiado, como en la reduccion del teorico de 3-SAT a 3-COLOR. Si un tal coloreo existe, encuentrelo, y uselo para obtener una elección de valores para las variables que hara la proposición verdadera.

a) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_4)$

b) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_3 \vee x_4) \wedge (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4)$

c) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_4) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$

d) $(x \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee \overline{z})$

X): Probar que 2-SAT $\in P$.

XI): Aplicar el algoritmo que haya obtenido en el ejercicio anterior al caso:

$$(x \vee y) \wedge (\overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee y) \wedge (z \vee w) \wedge (\overline{z} \vee u) \wedge (\overline{u} \vee \overline{w}) \wedge (\overline{z} \vee w) \wedge (x \vee w)$$

XII): Probar que HORN-SAT $\in P$, donde HORN-SAT es como SAT, pero se requiere que cada disjunción tenga a lo sumo un literal en forma positiva. (i.e, son todos, menos a lo sumo uno, de la forma $\overline{x}$ para alguna variable x.

XIII): Como ejemplo, usar el algoritmo del ejercicio anterior para determinar la satisfacibilidad de:

$$(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee y) \wedge (x) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{z} \vee \overline{w}) \wedge (\overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{z}) \wedge (\overline{w} \vee \overline{u})$$