Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

Introducción a la Física

Guía N°2

Problema 1:

a) Expresar en radianes los siguientes ángulos dados en grados sexagesimales:

$$\alpha = 35^\circ \qquad \beta = 245^\circ 36' 3''$$

b) Expresar en grados, minutos y segundos sexagesimales:

$$\alpha = 2 \; radianes \qquad \beta = \tfrac{6}{5}\pi \; radianes$$

Problema 2: Utilizando la circunferencia trigonométrica graficar las siguientes funciones: tangente, cotangente, secante y cosecante en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Problema 3: Conociendo que $\operatorname{sen}\alpha = b$ y que α se encuentra en el segundo cuadrante, calcule el valor de las restantes funciones trigonométricas de α en términos de b.

Problema 4: Demostrar que:

$$\textbf{a)} \; \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\textbf{b)} \; \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Problema 5: Demostrar que:

$$\textbf{a)} \; \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \qquad \textbf{b)} \; \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \qquad \textbf{c)} \; \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Discrimine según el cuadrantre al cual pertenece α, cuál signo de la raiz cuadrada se aplica en a) y b).

Problema 6: Resolver gráficamente la ecuación: $\operatorname{sen} x = \cos x$. Encuentre una expresión general para los valores de x que son soluciones de la ecuación anterior.

Problema 7: Encuentre los valores de x para los cuales: $\operatorname{sen} x = \dfrac{x}{4\pi} - 1$.

Problema 8: Resolver la siguiente ecuación trascendente: $\operatorname{tg} x - sec\, x = 1$.

Problema 9: Una torre proyecta una sombra de 50 m cuando el sol está a 45° sobre el horizonte. Calcular la altura de la torre.

Problema 10: A 35 m del eje del obelisco de la ciudad de Buenos Aires se sitúa un operador con un teodolito, quien encuentra que el ángulo sustendido por el obelisco es de $61°11'$. Calcule la altura del obelisco teniendo en cuenta que el instrumento está a $1,4$ m del suelo.

Problema 11: Desde el espejo de un faro marino situado a 250 m sobre el nivel del mar se observa un barco bajo un ángulo de depresión de 30°. Calcule la distancia horizontal entre el barco y el faro.

Problema 12: Dos observadores en tierra, separados por una distancia de 1000 m, observan un globo aerostático que se encuentra elevado entre ellos. Ambos observadores y el globo se hallan en un mismo plano vertical. Uno de los observadores mide un ángulo de elevación de 65° y el otro mide 35°. Calcule la altura a la que se encuentra el globo.

Problema 13: Considere los polígonos regulares de n lados inscriptos en un circunferencia de radio R.

a) Verifique que el perímetro de dichos polígonos puede expresarse como:

$$P(n) = 2\, n\, R \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

b) Verifique que el área encerrada por dichos polígonos puede expresarse como:

$$A(n) = n\, R^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

c) Grafique las funciones $P(n)$ y $A(n)$ para n = 3, 4, 5, 6 y 12 (considere $R = 1$ cm).

d) Teniendo en cuenta el límite notable $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, encuentre los límites de las sucesiones $P(n)$ y $A(n)$. Interprete geométricamente estos resultados.

e) Encuentre el límite de la sucesión $a_n = \dfrac{A(n)}{P(n)}$ y compare con el correspondiente cociente entre el área y el perímetro del círculo.

Problema 14:

a) Encuentre las cotas de la función $f(x) = x^2$ para valores de $|x - 2| < \delta$, en los cuatro casos $\delta = 0.1$, $\delta = 0.01$, $\delta = 0.001$, $\delta = 0.0001$.

b) Utilizando la definición de límite demuestre que el siguiente límite existe:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$$

Problema 15: Calcular los siguientes límites:

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{4x} \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

En el caso b) elaborar una adecuada construcción geométrica sobre la circunferencia trigonométrica.

Problema 16: Graficar:

a) En el intervalo $[0,2]$ las funciones:

$$f(x)=x; \qquad f(x)=x^2; \qquad f(x)=\sqrt{x}; \qquad f(x)=x^{1/3}$$

b) En el intervalo $[1,3]$ las funciones:

$$\begin{array}{lcllcl} f(x) & = & e^x & f(x) & = & x+1 \\ f(x) & = & (x+1)^2 & f(x) & = & \ln x \\ f(x) & = & \sqrt{x-1} & f(x) & = & (x-1)^{1/3} \end{array}$$

Problema 17: Determine de qué orden son los siguientes infinitésimos:

a) $\dfrac{5\,x^2}{3\,x^3-1}$ para $x\to\infty$

b) $\sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}}$ para $x\to 0$

c) $\dfrac{x^{3/2}-x^{1/2}}{x+2}$ para $x\to 0$

d) $\dfrac{x^{3/2}-1}{x^2+2}$ para $x\to\infty$.

Problema 18: Derivar aplicando la definición las siguientes funciones:

$$\textbf{a)}\ f(x)=2\,x-1 \qquad \textbf{b)}\ f(x)=x^3+b \qquad \textbf{c)}\ f(x)=\frac{x^2+a}{x}$$

Problema 19: Derive las siguientes funciones:

$$\begin{array}{llllllllll} \textbf{a)} & f(x) & = & a\,x^2+b\,x+c & \textbf{b)} & f(x) & = & x^3-2\,x & \textbf{c)} & f(x) = \dfrac{bx}{x+a}+c\,x^2 \\ \textbf{d)} & f(x) & = & \ln(\operatorname{sen} x^2) & \textbf{e)} & f(x) & = & (a^2-x^2)^{1/2} & \textbf{f)} & f(x) = \ln\left(\dfrac{x\,e^x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\ \textbf{g)} & f(x) & = & x^2(x+b)^{-1/2} & \textbf{h)} & f(x) & = & \operatorname{sen}\left(2\,x^2\right) & \textbf{i)} & f(x) = \operatorname{tg} x \\ \textbf{j)} & f(x) & = & x^3\,x^{1/2} & \textbf{k)} & f(x) & = & \sec(x)\operatorname{sen}(2x) & \textbf{l)} & f(x) = \dfrac{x^2+a}{\operatorname{tg}(x^2+a)} \end{array}$$

Problema 20: Utilizando la regla de L'Hospital y el principio de inducción completa calcule los siguientes límites:

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{1/n}}$$

Problema 21: Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y determinar si son máximos, mínimos o puntos de inflexión. Graficar.

a) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 4\,x + 9$ **b)** $f(x) = \frac{x}{x^2 + a}$ **c)** $f(x) = x^n, \quad n \ natural$

d) $f(x) = x^4 + x^3$ **e)** $f(x) = x + \frac{1}{x}$ **f)** $f(x) = (x+3)^2\,(x-5)$

g) $f(x) = \frac{4\,(4\,x+1) - x^2}{13x^3}$

Problema 22: Determinar la función cuadrática $f(x)$ tal que se anula para $x = 3$ y $x = 7$ y tiene un mínimo en x_0 tal que $f(x_0) = -8$.

Problema 23: Estudie la función:

$$y(x) = \frac{T\,x - 1}{x^2} + \frac{1}{3\,x^3}$$

para $x > 0$.
Considerando distintas posibilidades para el valor del parámetro T. En particular:

a) $0 < T < \frac{3}{4}$ **b)** $\frac{3}{4} \leq T < 1$ **c)** $T > 1$.

Grafique la función en cada uno de estos casos.

Problema 24: ¿Cuál es el área máxima que puede encerrar un rectángulo de perímetro P?

Problema 25: Determinar el rectángulo inscripto en la elipse de semiejes a y b de lados paralelos a los ejes y de área máxima.

Problema 26: Se quiere construir una caja sin tapa con una hoja de cartón de 10 cm x 80 cm. ¿Cuáles serán las dimensiones de la caja para que tenga capacidad máxima?.

Problema 27: Sea la función $y(x) = 3\,x^2 + 2\,x - 8$. Calcular la diferencia entre Δy y dy en $x = x_o$.

Problema 28: ¿Cuál debe ser la longitud de un hilo que rodee la Tierra por una circunferencia máxima?. Si repetimos la operación de manera tal que exista 1 cm entre el hilo y la Tierra, cuánto debemos aumentar la longitud del hilo?. Utilice diferenciales para el cálculo y compare con el valor exacto de variación de la longitud.

Problema 29: Suponga que se quiere rodear la Tierra con una esfera metálica de forma tal que exista entre ambas una capa de aire de 1 cm de espesor. ¿Cuánto más grande debe ser la superficie de la esfera respecto de la superficie de la Tierra?. ¿Y su volumen?. Utilice diferenciales para el cálculo y compare con los valores exactos de la variación de la superficie y el volumen. (Radio de la Tierra: 6400 Km).

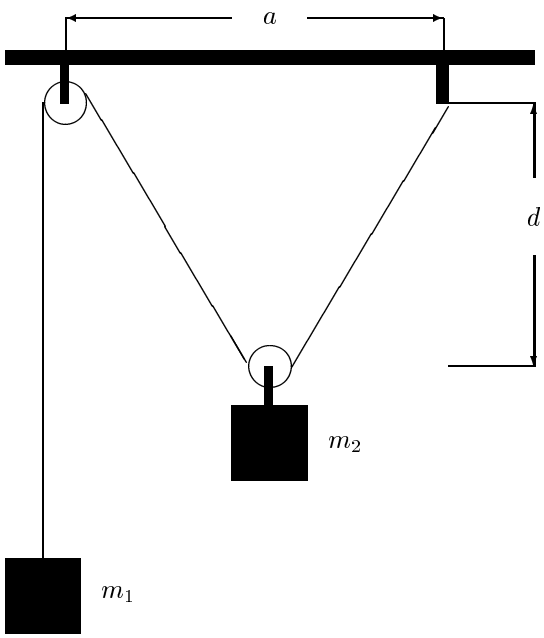
Problema 30: La medida del diámetro de un círculo es $d = 13.8\,\text{cm}$, con un error por defecto menor que $0.1\,\text{cm}$. Calcular mediante la diferencial el error cometido en la determinación de la superficie.

$$S = \frac{\pi}{4}d^2$$

Comparar con el valor exacto de ΔS.

Problema 31: Demostrar que el error relativo cometido en la determinación del área S de un círculo es igual al doble del error relativo del radio r (se define como error relativo de una magnitud M al cociente dM/M).
Compare dS con el valor exacto de ΔS para $\dfrac{dr}{r} = 0.01$ y $r = 10$.

Problema 32: La Figura muestra un sistema compuesto por las masas m_1 y m_2 las cuales se hallan suspendidas de forma tal que mientras m_1 está atada a un extremo de la cuerda, m_2 está colgada del eje de la polea la cual puede deslizar libremente sobre la cuerda. La longitud total de la cuerda es $L = 15\,\text{m}$, $a = 60\,\text{cm}$ y $d = 70\,\text{cm}$. Los radios de ambas poleas son despreciables frente a las dimensiones de a y d.



a) Si la masa m_1 se desplaza 1 cm hacia abajo, hallar el desplazamiento de la masa m_2 utilizando la diferencial. No utilice calculadora. Compare con el desplazamiento exacto ocurrido.

b) Suponiendo que m_1 se desplaza con velocidad v, calcule la velocidad de la masa m_2.

Problema 33: Considere la siguiente función de movimiento de un cuerpo:

$$x(t) = t^2 - 3\,t\ ,$$

donde $[x] = \text{m}$ y $[t] = \text{s}$.

a) Graficar la función $x(t)$.

b) Determinar analíticamente en todos los casos y gráficamente en los siete primeros, los valores de $\bar{v}$ (velocidad media del móvil) en los siguientes intervalos de tiempo expresados en segundos: $[-1, 5]$, $[-1, 4]$, $[-1, 2]$, $[-1, 1]$, $[-1, -0.5]$, $[-1, -0.8]$, $[-1, -0.9]$, $[-1, -0.99]$, $[-1, -0.999]$ y $[-1, -0.9999]$.

c) Sea $\Delta t_n = t_n - t_0$, con $t_0 = -1\,\text{s}$ y $t_1 = 5\,\text{s}$, $t_2 = 4\,\text{s}$, $\cdots$, $t_{10} = -0.9999\,\text{s}$. A medida que Δt_n se hace más pequeño, a qué valor se aproxima la velocidad media del móvil en el intervalo $[-1, -1 + \Delta t_n]\,\text{s}$?. ¿Cómo se interpreta geométricamente este resultado?.

d) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la función $x(t)$ en $t = -1\,\text{s}$.

Problema 34: Las coordenadas de dos móviles están dadas en función del tiempo por:

$$x_1 = -t^2 + 3\,t \qquad\qquad x_2 = \frac{8}{3}t + 4$$

Hallar la mínima distancia que separa a los móviles y el instante en el que están en esa situación.
Graficar: $x_1(t) - x_2(t)$ y $d(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$

Problema 35: Sabiendo que las funciones de movimiento de los móviles A y B son respectivamente:

$$x_A(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2 \qquad\qquad x_B(t) = \frac{3}{2}t - 2$$

a) Calcule la distancia mínima que los separa y el instante de tiempo t_m en que esto se produce.

b) Calcule $\bar{v}_A$ y $\bar{v}_B$ entre 0 y t_m.

c) Calcule $v_A(t_m)$ y $v_B(t_m)$.

Fa.M.A.F ©1996