Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

Mecánica

Guía N°2: Cálculo Variacional y Función de Lagrange

Problema 1: Un niño se deja caer por un tobogán cuya forma viene dada por la curva $y(x)$, bajo la acción de la fuerza de gravedad $\vec{F} = -mg\hat{\jmath}$ (se supone despreciable el rozamiento). El tobogán tiene sus puntos extremos en (x_1, y_1) y (x_2, y_2), con $x_1 < x_2$ e $y_1 > y_2$.

a) Determine la expresión para el tiempo que demora en recorrerse el tobogán.

b) A partir de la formulación variacional de Euler-Lagrange, calcule la forma del tobogán $y(x)$ que minimiza el tiempo de descenso. Esta curva denominada *braquistócrona*, corresponde a la de una cicloide.

c) Utilizando la ecuación de la curva obtenida demuestre que, manteniendo fijo el punto de llegada en el extremo inferior de la cicloide, el tiempo empleado en descender el tobogán es independiente del punto de partida (en reposo). Notar que este hecho permite la construccuón de un péndulo rigurosamente isócrono.

Problema 2: El *principio de Fermat* establece que la trayectoria seguida por un rayo de luz entre dos puntos dados, es tal que el tiempo empleado en recorrerla es mínimo.

a) Demuestre que para un rayo de luz que se propaga en un medio con índice de refracción constante, la trayectoria es recta.

b) Demuestre que para un rayo de luz que pasa por dos puntos que se encuentran en medios contiguos de índices de refracción n_1 y n_2, respectivamente, y seperados por una interfase plana, se cumple la ley de Snell.

c) Determine la trayectoria de un rayo de luz en el plano (y, z) suponiendo que el índice de refracción cambia con la "altura" z, es decir $n = n(z)$.

Problema 3: Dada una curva plana $y(x)$ podemos generar una superficie de revolución, haciendo girar la curva alrededor del eje y. Obtenga la curva que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2), con $x_1 < x_2$, que genera la superficie de área mínima. Verifique que dicha curva corresponde a una catenaria.

Problema 4: Construya la función de Lagrange para una partícula en caída libre (sin rozamientos) en la proximidad de la superficie de la tierra. A continuación, calcule el valor de la *acción* entre los instantes de tiempo $t_1 = 0$ y $t_2 = 1$, considerando $z(t_1) = 0$ y asumiendo las siguientes trayectorias:

a) $z = at$; **b)** $z = bt^2$; **c)** $z = ct^3$.

Las constantes a, b y c deben ser determinadas de manera tal que se satisfaga: $z(t_2) = \frac{1}{2}\, g\, t_2^2$. Comente los resultados obtenidos.

Problema 5: Calcule el Lagrangeano correspondiente a una partícula libre en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

Problema 6: Demuestre que dos Lagrangeanos $L_1(q, \dot{q}, t)$ y $L_2(q, \dot{q}, t)$, los cuales difieren entre sí solamente en la derivada total respecto del tiempo de una función $f(q, t)$ que depende de las coordenadas y el tiempo:

$$L_2(q, \dot{q}, t) = L_1(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t) \ ,$$

generan las mismas ecuaciones de movimiento.

Problema 7: Una partícula describe un movimiento unidimensional bajo la acción de un campo conservativo:

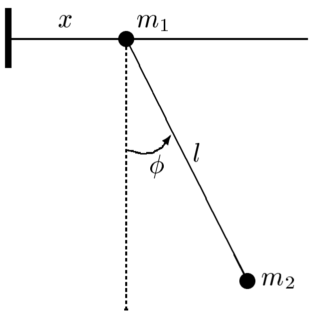
$$m\, \ddot{r} = -\frac{dU(r)}{dr} \ .$$

Considere ahora la siguiente transformación de coordenadas: $r = r(q, t)$. Demuestre que la función de movimiento en términos de la coordenada genaralizada $(q(t))$ satisface la ecuación de Euler-Lagrange:

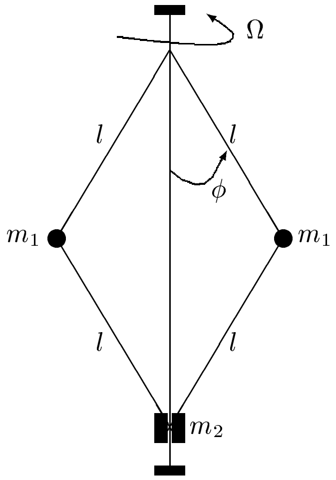
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \ ,$$

donde se construye la función L a partir de la energía cinética T y U: $L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t)$.

Problema 8: Escribir el Lagrangeano para un péndulo simple de masa m_2 cuyo punto e suspención es la masa m_1, la cual se puede desplazar libremente sobre una recta horizontal fija que se encuentra en el mismo plano.



Problema 9: Escribir el Lagrangeano para el regulador centrífugo que se muestra en la figura. El sistema consta de varillas rígidas sin masa unidas por articulaciones sin fricción. El punto superior está fijo y m_2 puede desplazarse sobre el eje vertical. Todo el sistema gira con velocidad angular constante Ω alrededor del eje vertical.

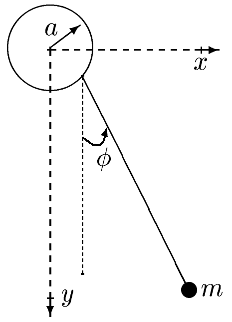


Problema 10: Escribir el Lagrangeano y las correspondientes ecuaciones de movimiento para un péndulo plano cuyo punto de suspensión:

a) se desplaza con velocidad angular constante γ sobre una circunferencia vertical de radio a (ver figura);

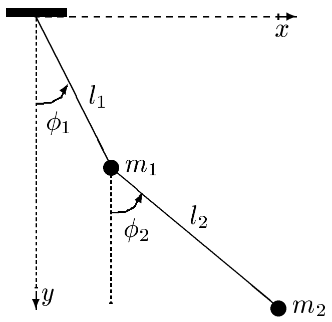
b) se mueve sobre el eje x según $x(t) = a\cos(\gamma t)$;

c) se mueve sobre el eje y según $y(t) = a\cos(\gamma t)$.

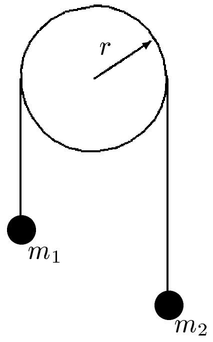


Mediante la adición de la derivada total respecto del tiempo de una adecuada función de la coordenada y el tiempo, simplificar en cada uno de los casos anteriores la expresión del Lagrangeano. Comprobar que las ecuaciones de movimiento no se modifican.

Problema 11: Escribir el Lagrangeano y las correspondientes ecuaciones de movimiento para el péndulo doble coplanar de la figura.



Problema 12: La máquina de Atwood consta de una polea vertical que puede girar libremente sobre un eje perpendicular que pasa por su centro, y de dos masas unidas por una cuerda inextensible que cuelga de la polea. Las masas de la polea y la cuerda se asumen despreciables frente a m_1 y m_2. Determine las coordenadas generalizas necesarias para describir el problema, escriba el Lagrangeano y las ecuaciones de movimiento.



Problema 13: Una masa puntual m exenta de fuerzas externas se encuentra unida por una cuerda inextensible de masa despreciable a un cilindro de radio R. Inicialmente la cuerda está totalmente enrollada de modo que la masa toca el cilindro. Se le da un impulso radial a la masa, con lo que la cuerda empieza a desenrollarse.

a) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?

b) Escriba el Lagrangeano del sistema y las correspondientes ecuaciones de movimiento.

c) Resuelva las ecuaciones utilizando la condición inicial planteada.