Mecánica

Guía N°3: Cantidades Conservadas, Vínculos y Movimiento Unidimensional

Problema 1: Calcular las expresiones cartesianas y el valor del módulo del momento angular de una partícula:

a) cuyas coordenadas cilíndricas son r, ϕ, z;

b) cuyas coordenadas esféricas son r, θ, ϕ.

Problema 2: Considere una partícula la cual puede moverse libremente sobre la superficie de: **a)** una esfera, **b)** un cilindro, **c)** un cono.

Determine la ecuación para la trayectoria y las cantidades conservadas en el movimiento, en cada uno de los casos.

Problema 3: Determinar qué componentes del momento lineal y angular se conservan en el movimiento dentro de los siguientes campos gravitatorios:

a) Campo cuya fuente es un plano homogéneo infinito.

b) Campo cuya fuente es un cilindro homogéneo infinito.

c) Campo cuya fuente es un prisma homogéneo infinito.

d) Campo debido a dos fuentes puntuales.

e) Campo cuya fuente es un semiplano homogéneo infinito.

f) Campo cuya fuente es un cono homogéneo infinito.

g) Campo cuya fuente es un toro circular homogéneo.

h) Campo cuya fuente es una hélice cilíndrica homogénea infinita.

Problema 4: Sea $q_1, \ldots, q_n$ un conjunto de coordenadas generalizadas independientes para un sistema de n grados de libertad, cuyo Lagrangeano es $L(q, \dot{q}, t)$. Suponga que se realiza una transformación a otro conjunto de coordenadas independientes $s_1, \ldots, s_n$ a través de las siguientes ecuaciones:

$$q_i = q_i(s_1, \ldots, s_n), \qquad\qquad i = 1, \ldots, n.$$

Tal transformación se conoce como *transformación puntual.* Muestre que la forma de las ecuaciones de Euler-Lagrange es *invariante* ante transformaciones puntuales.

Problema 5: Determinar la ley de transformación de la energía y del impulso generalizado bajo la transformación de coordenadas:

$$q_i = f_i\left(Q_1, \ldots, Q_s, t\right), \qquad i = 1, \ldots, s.$$

Como caso particular, considerar el paso a un sistema de referencia que gira alrededor del eje z:

a) En coordenadas cilíndricas: $\phi = \phi' + \Omega t, \qquad r = r'$

b) En coordenadas cartesianas: $x = x' \cos\Omega t - y' \,\mathrm{sen}\Omega t \qquad y = x' \,\mathrm{sen}\Omega t + y' \cos\Omega t$

Problema 6: Calcule las cantidades conservadas en el movimiento de una partícula en un campo uniforme: $U(\vec{x}) = -\vec{F}\cdot\vec{x}$.

Problema 7: Considere el péndulo cicloidal: Una partícula bajo la acción del campo gravitatorio constante $(\vec{g} = -g\hat{j})$ se mueve sin rozamiento sobre una pista paramétricamente descripta por:

$$\begin{aligned} x &= a(\theta + \mathrm{sen}\theta) \\ y &= a(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

a) Escribir el Lagrangeano y las ecuaciones de movimiento. (Ayuda: utilizar θ como cooredenada generalizada).

b) Resolver la ecuación de movimiento y verificar que el péndulo cicloidal es rigurosamente isócrono.

Problema 8: Un plano inclinado $(z = ax)$ se mueve en la dirección vertical (z) según una función conocida del tiempo $F(t)$. Un cuerpo de masa m desliza sin fricción sobre dicho plano. Suponga que hay un campo gravitatorio constante $\vec{g} = -g\hat{k}$, y que inicialmente $\dot{x}(0) = \dot{z}(0) = 0$, $x(0) = x_0$, $z(0) = z_0$. Obtenga la fuerza de vínculo del plano sobre el cuerpo en función del tiempo.

Problema 9: Obtenga las ecuaciones de movimiento para una partícula en un campo gravitatorio constante que se desplaza sin roce sobre:

a) una parábola que se encuentra en un plano vertical;

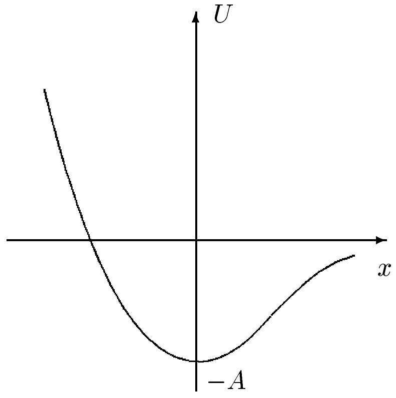
b) una circunferencia de radio R que se halla en un plano vertical.

Obtenga expresiones para las fuerzas de ligadura. Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange.

Problema 10: Una partícula de masa m se mueve en el campo gravitacional uniforme a lo largo de una recta que gira con velocidad angular constante Ω en un plano vertical. Escriba las ecuaciones de movimiento de la partícula y calcule la fuerza de vínculo.

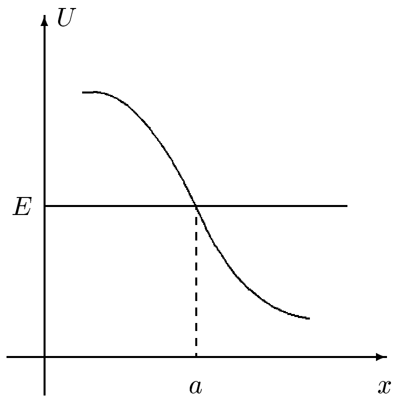
Problema 11: Determinar el movimiento de una partícula que se mueve en el potencial de Morse:

$$U(x) = A\left(e^{-2ax} - 2\,e^{-ax}\right)$$

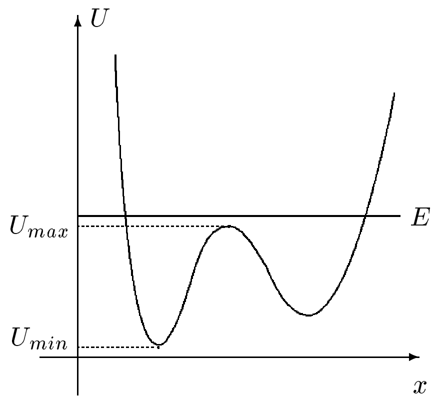


Problema 12: Calcular la función de movimiento $x(t)$ para una partícula en el campo $U(x) = -A\,x^4$, si su energía es igual a cero.

Problema 13: Determinar aproximadamente la función de movimiento $x(t)$ de una partícula en un campo $U(x)$ cerca del punto e retorno $x = a$. Utilizar un desarrollo en serie de Taylor de $U(x)$ alrededor del punto $x = a$. Discriminar las situaciones $U'(a) \neq 0$ y $U'(a) = 0$ con $U^{(n)}(a) \neq 0$.



Problema 14: Estimar el período del movimiento de una partícula en el campo $U(x)$ bosquejado en la figura, para la situación en que la energía es muy próxima al máximo local del potencial, i.e., $E - U_{max} = \epsilon << U_{max} - U_{min}$. **Ayuda**: Desarrolle el potencial alrededor de su máximo local.



Problema 15: Determinar la variación en la función de movimiento $x(t)$ de una partícula, producida por la adición de una cantidad pequeña $\delta U(x)$ al campo $U(x)$, en una región finita donde *no* existen puntos de retorno.