Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

Mecánica

Guía N°4: Potencial Central y Dispersión

Problema 1: Considere el *péndulo esférico*: Una partícula de masa m restringida a moverse en la superficie de una esfera de radio R, bajo la acción de la gravedad $\vec{g} = -g\hat{z}$.

a) Escribir el Lagrangeano del sistema en coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) y determinar las coordenadas cíclicas y cantidades conservadas.

b) Definir una *energía potencial efectiva* $U_{\text{eff}}(\theta)$ e integrar las ecuaciones de Euler-Lagrange. Determine (al menos cualitativamente) las regiones permitidas para el movimiento de la partícula.

Problema 2: Determinar las posibles trayectorias de una partícula en el siguiente potencial central:

$$U(r) = \begin{cases} U_0 \ , & r < r_0 \\ 0 \ , & r > r_0 \end{cases}$$

Problema 3: Para una partícula se mueve en un potencial central Kepleriano $U(r) = -(\alpha/r)$, se define el vector de Lenz $\mathcal{L}$ según:

$$\mathcal{L} = \vec{v} \times \vec{M} - k\,\frac{\vec{r}}{r}$$

a) Demuestre que $\mathcal{L}$ se conserva para una adecuada elección de k. ¿En qué dirección apunta $\mathcal{L}$?

b) Utilice la integral de movimiento $\mathcal{L}$ para calcular las trayectorias del problema de Kepler.

Problema 4: Caída al centro en un potencial central:

a) Integre las ecuaciones de movimiento para una partícula en el campo central $U(r) = -\alpha/r^2$ ($\alpha > 0$). Determine en qué casos la partícula *cae* al centro de potencial, y cuánto tarda.

b) Considere ahora el movimiento en un campo central $U(r) = -\alpha/r^n$ ($n \geq 1$, $\alpha > 0$). Determine si es finito o no el número de vueltas realizadas por la partícula alrededor del centro. Determine cuanto tarda la partícula en llegar al centro de potencial. Resuelva la ecuación de movimiento en la aproximación de r pequeño.

Problema 5: Determine qué potencial central admite como solución órbitas circulares que pasan por el centro de potencial.

Solución: $U(r) = \alpha/r^4$. Demostrarla!

Problema 6: Cuando se añade al potencial central $U(r) = -\alpha/r$ $(\alpha > 0)$ una pequeña corrección $\delta U(r)$, la trayectoria para un movimiento finito deja de ser cerrada, y con cada revolución el perihelio de la órbita se desplaza un pequeño ángulo $\delta\phi$. Determine $\delta\phi$ para:

a) $\delta U = \beta/r^2$; **b)** $\delta U = \gamma/r^3$.

Problema 7: Un oscilador armónico tridimensional consiste en una partícula de masa m que se mueve en el potencial $U(r) = \frac{1}{2}\, m\, \omega^2 r^2$.

a) Integre las ecuaciones de movimiento, y muestre que las órbitas son elipses *centradas* en el origen.

b) Obtenga la velocidad angular de precesión cuando se agrega una pequeña perturbación $\delta U = \beta/r^4$. $\beta << m\,\omega^2\, a^6,\ m\,\omega^2\, b^6$, donde a y b son los parámetros de la trayectoria no perturbada:

$$\left(\frac{r\ \cos\phi}{a}\right)^2 + \left(\frac{r\,\mathrm{sen}\,\phi}{b}\right)^2 = 1$$

Problema 8: Una partícula está atraída hacia un punto fijo por una fuerza $F(r) = -K/r^n$, $K > 0$. Utilice un análisis perturbativo para demostrar que cuando $n < 3$ es posible encontrar órbitas circulares estables.

Problema 9: Generalice el teorema del virial para sistemas que incluyan fuerzas de rozamiento proporcionales a la velocidad.

Problema 10: Determine la sección eficaz para captura de meteoritos por la Tierra en función de v_∞ y el parámetro de impacto b. Suponga como condición de captura que la distancia al centro de la Tierra en el perigeo de la órbita sea menor que el radio terrestre.

Problema 11: Determine la sección eficaz diferencial y total de dispersión respecto del centro de masa en cada uno de los siguientes casos:

a) Pozo de potencial esférico de radio a y profundidad U_0:

$$U(r) = \begin{cases} -U_0\ , & r < a \\ 0\ , & r > a \end{cases}$$

b) $U(r) = \alpha/r^2$ $(\alpha > 0)$.

Problema 12: Considere la colisión elástica de dos partículas de masas m_1 y m_2. Determine el ángulo de desviación χ respecto del centro de masa en función del ángulo θ_1 y en función del ángulo θ_2, correspondientes a las desviaciones de las partículas respecto del sistema laboratorio.

Problema 13: Calcular la sección eficaz total de captura para un potencial central de la forma $U(r) = -\alpha/r^n$ $(n \geq 2$ y $\alpha > 0)$. La captura es la situación en la cual la partícula *cae* al centro del potencial.

Problema 14: Calcular la sección eficaz total para un haz de partículas incidente, paralelo al eje y, sobre un cubo rígido de lado a, cuyas caras son paralelas a los planos definidos por los ejes Cartesianos.