Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

Mecánica

Guía N°5: Cuerpo Rígido

Problema 1: Determine los momentos principales de inercia para los siguientes cuerpos rígidos:

a) Molécula de cuatro átomos que forman un tetraedro de base equilátera. Los tres átomos de la base son de masa m_1 y forman un triángulo equilátero de lado a; mientras que el cuarto átomo, de masa m_2, dista del centro de la base a una distancia h. Considere tambien el caso del tetraedro regular con todos los átomos de igual masa y caras equiláteras.

b) Cilindro circular homogéneo de radio R y altura h.

c) Cono circular homogéneo de altura h y radio de la base R.

d) Elipsoide homogéneo de semiejes a, b y c.

e) Esfera homogénea de radio a, en cuyo interior se halla una cavidad esférica de radio $a/2$, cuyo centro está desplazado respecto del primero una distancia $a/3$.

Problema 2: Mostrar que si se desplaza el origen del sistema de coordenadas según un vector $\vec{r}_0$, el tensor de inercia respecto del nuevo origen tendrá el mismo sistema de ejes principales (salvo traslaciones), si el primitivo origen del sistema de coordenadas coincide con el centro de masa y si $\vec{r}_0$ tiene la dirección de uno de los ejes principales de inercia.

Problema 3: Usando las correspondientes condiciones de vínculo, calcular la energía cinética de los siguientes cuerpos rígidos:

a) Un cilindro inhomogéneo de radio R, que rueda sobre un plano. La masa se encuentra distribuída de forma tal que un eje principal de inercia resulta paralelo al eje del cilindro y el centro de masa se encuentra desplazado una distancia $a\,(< R)$ del eje geométrico. El correspondiente momento de inercia asociado a dicho eje principal es I.

b) Un cilindro homogéneo de radio a que rueda dentro de una superficie cilíndrica de radio R.

c) Un cono homogéneo que rueda sobre un plano.

d) Un cono homogéneo cuya base rueda sobre un plano y cuyo vértice está fijo a una altura sobre el plano igual al radio de la base, de modo que el eje del cono queda paralelo al plano.

e) Un elipsoide homogéneo que rota alrededor de uno de sus ejes principales (respecto del cual es simétrico), el cual a su vez gira alrededor de un eje vertical con el cual forma un ángulo α constante.

Problema 4: Considerar un trompo simétrico en el campo gravitatorio, cuyo punto inferior está fijo.

a) Construir el Lagrangeano. Determinar las cantidades conservadas, y a partir de estas estudiar el movimiento del cuerpo.

b) Determinar la condición de estabilidad para la rotación del trompo alrededor de un eje vertical.

c) Determinar el movimiento del trompo para el caso en que la energía cinética de rotación alrededor de su eje de simetría sea grande comparada con su energía en el campo gravitacional (trompo rápido).

Problema 5: Considere un disco plano de radio a y espesor d, delgado ($a >> d$) y simétrico respecto de su eje, que puede rotar y deslizarse libremente apoyado sobre una superficie plana horizontal *sin rozamiento.* Para describir su movimiento considere un sistema de coordenadas cartesianas cuyo eje Z es perpendicular al plano y los ángulos de Euler (ϕ, θ, ψ) de forma tal que x_3 está en la dirección del eje de simtría del disco y la intersección del plano del disco con el plano XY (línea ON) forma un ángulo ϕ con el eje X.

a) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?

b) Escribir la función de Lagrange.

c) Calcular las cantidades conservadas.

d) Determine bajo qué condiciones el disco rota manteniendo el ángulo de inclinación θ constante. Asumir que la proyección de la velocidad angular sobre su eje es grande comparada con toda otra proyección.

e) Determine bajo qué condiciones la rotación del disco manteniendo su eje en posición horizontal (es decir con $\theta = \frac{\pi}{2}$) es estable.

Problema 6: Determinar las ecuaciones y estudiar el movimiento de:

a) Una esfera homogénea que rueda sin deslizar sobre un plano inclinado bajo la acción de la gravedad.

b) Un cono que rueda sin deslizar sobre una superficie plana.

Problema 7: Para los sólidos no simétricos no es posible resolver analíticamente las ecuaciones de Euler en términos de funciones elementales. Demuestre que, sin embargo, puede utilizarse la conservación de la energía y del momento angular para obtener expresiones (en términos de integrales elípticas) para las componentes de $\vec{\omega}$ en un sistema fijo al cuerpo.

Problema 8: Un objeto es disparado verticalmente hacia arriba desde la superficie de la tierra con velocidad inicial V_0. El lugar del disparo se encuentra en colatitud L. Probar que al retornar, el objeto cae hacia el oeste desplazado un distancia $4\,\Omega\, V_0^3 \cos L/3\, g^2$ del punto de disparo. En la expresión, Ω es la velocidad angular de rotación terrestre y g la aceleración gravitatoria en la superficie en el punto de disparo. Despreciar el movimiento de la tierra alrededor del sol, como así tambien los efectos de fricción en la atmósfera.

Problema 9: *Péndulo de Foucault.* Determine el efecto de la rotación de la tierra sobre las pequeñas oscilaciones de un péndulo. ¿Cuánto rota el plano de oscilación al cabo de un día?