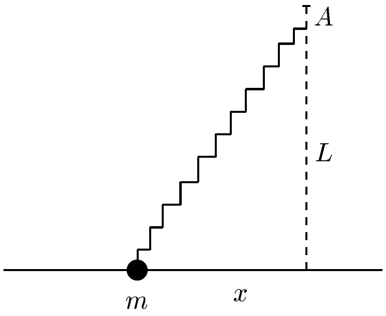
Mecánica

Guía N°6: Pequeñas Oscilaciones

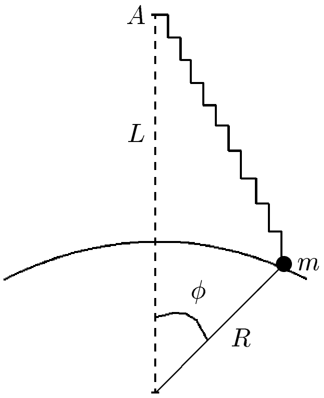
Problema 1: Calcule la frecuencia de pequeñas oscilaciones para una partícula de masa m ubicada en los mínimos de los siguientes potenciales:

a) $U(x) = V\cos(ax) - Fx$, **b)** $U(x) = V\left(a^2x^2 - \mathrm{sen}^2(bx)\right)$.

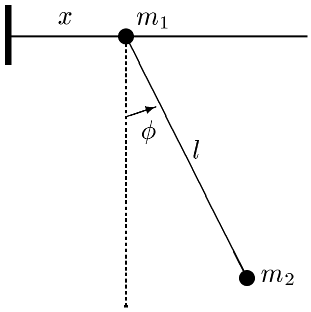
Problema 2: Determinar la frecuencia para las oscilaciones de una partícula de masa m, la cual puede moverse libremente sobre un eje horizontal y está unida a un resorte cuyo otro extremo se encuentra fijo en el punto A. El punto A dista en L del eje de movimiento y se asume que el resorte se encuentra estirado aun cuando m pasa por debajo de A.



Problema 3: Determinar la frecuencia para las oscilaciones de una partícula de masa m, la cual se encuentra en el extremo de un hilo inextensible de largo R y está unida a un resorte cuyo otro extremo se encuentra fijo en el punto A. El punto A dista en $L + R$ del punto de sujeción del hilo. Se asume que el resorte se encuentra estirado cuando su largo es L.



Problema 4: Determinar la frecuencia para las pequeñas oscilaciones de un péndulo de masa m_2 cuyo punto soporte es la masa m_1, la cual puede moverse libremente sobre un eje horizontal.



Problema 5: Calcular el cociente entre las frecuencias ω y ω' correspondientes a las oscilaciones de dos moléculas diatómicas consistentes en átomos de diferentes isótopos. Las masas de los átomos en dichas moléculas son m_1, m_2 y m_1', m_2', respectivamente. Los átomos de isótopos interactúan de igual manera.

Problema 6: Determinar la corrección a la frecuencia de pequeñas oscilaciones de una molécula diatómica, debida a la presencia de un *pequeño* momento angular.

Problema 7: Determine la amplitud final de las oscilaciones de un sistema cuya frecuencia característica es ω, bajo la acción de la fuerza:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{F_0}{T}\, t & 0 < t < T \\ F_0 & t > T \end{cases}$$

considerando que hasta el instante $t = 0$ el sistema se encontraba en reposo en su posición de equilibrio.

Problema 8: Considere pequeñas oscilaciones en el péndulo doble coplanar de longitudes l_1 y l_2 y masas m_1, m_2, introducido en la Guía de Problemas N°2:

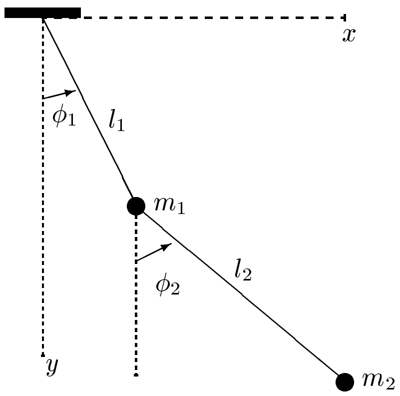
a) Determine las configuraciones de equilibrio estable del sistema.

b) Escriba el Lagrangiano correspondiente a pequeñas oscilaciones y las correspondientes ecuaciones de movimiento en dicha aproximación.

c) Calcule las frecuencias características del sistema.

d) Interprete físicamente el límite $m_1 \to \infty$.

e) Determine las coordenadas normales y reescriba el Lagrangiano de pequeñas oscilaciones en términos de ellas.

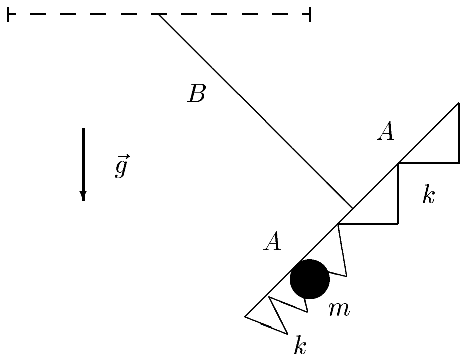


Problema 9: Determine los modos normales de vibraciones longitudinales de la siguiente cadena lineal de masas m y resortes k, sujeta en ambos extremos a una pared: pared $- \; k - m - k - m - k - m - k \; -$ pared.

Problema 10: Determine las frecuencias de vibraciones normales de una molécula lineal tri-atómica simétrica $A - B - A$, suponiendo que la energía potencial es función de las distancias $A - B$ y $B - A$ y del ángulo $\widehat{ABA}$.

Problema 11: Estudie las oscilaciones forzadas de un oscilador armónico sometido a una fuerza $f(t) = f_0\, e^{\alpha t} \cos(\gamma t)$ si además hay una fuerza de rozamiento proporcional (y opuesta) a la velocidad.

Problema 12: Considere el sistema de la figura, compuesto por dos varillas de espesor despreciable que están rígidamente unidas en forma de "T" y por una partícula de masa m que se puede desplazar por la parte transversal de la T. La partícula puede moverse sin rozamiento y está acoplada a dos resortes de longitud natural nula y constante k, fijados a los extremos del brazo transversal de la T. La densidad lineal de masa de las varillas es λ y sus longitudes son $2A$ y B, respectivamente. La T se encuentra colgada bajo la acción de un campo gravitatorio constante g.



a) Determine el número de grados de libertad del sistema y un conjunto de coordenadas generalizadas adecuadas para describirlo. Escriba el Lagrangiano.

b) Determine las posiciones de equilibrio estables para el sistema.

c) Asumiendo pequeños apartamientos de las posiciones de equilibrio, determine las frecuencias propias.

d) Calcule los modos normales de oscilación.

Problema 13: Considere un paraboloide de sección elíptica dado por:

$$2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$$

con $a > b > 0$. El mismo gira alrededor de su eje z con velocidad angular constante ω. Dicho eje está ubicado paralelo a un campo gravitarorio constante g en la dirección negativa. Sobre su superficie se mueve, libre de rozamiento, una partícula puntual de masa m.

a) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?

b) Escriba el Lagrangiano desde un sistema solidario al paraboloide.

c) ¿Qué cantidades se conservan?

d) Plantee las ecuaciones de movimiento e interprete físicamente los distintos términos obtenidos.

e) En el mismo sistema, describa las posibles configuraciones de equilibrio.

f) Resuelva el movimiento de la partícula para pequeños apartamientos respecto de la posición de equilibrio.

g) ¿Para qué valores de ω la posición de equilibrio se hace inestable?