Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

Mecánica

Guía N°7: El Hamiltoniano y las Ecuaciones Canónicas

Problema 1: Escribir el Hamiltoniano y las correspondientes ecuaciones de Hamilton para una partícula libre en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

Problema 2: Escribir el Hamiltoniano y las correspondientes ecuaciones de Hamilton para una partícula en un potencial central. Analice el problema de Kepler en esta descripción.

Problema 3: Determinar la función de Hamilton correspondiente al oscilador anarmónico cuya función de Lagrange es:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\,\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\,\omega^2\,x^2 - \alpha\,x^3 + \beta\,x\,\dot{x}^2$$

Problema 4: Una partícula puede moverse sobre la superficie interna de un cilindro infinito de radio R, cuyo eje está ubicado horizontalmente, en presencia de un campo gravitatorio vertical homogéneo con aceleración g.

a) Escribir el Hamiltoniano del sistema.

b) Resolver el problema de pequeñas oscilaciones correspondiente.

Problema 5: Determinar la función de Hamilton correspondiente a una partícula en un campo conservativo, en términos de las coordenadas cartesianas de un sistema que rota uniformemente alrededor del eje z con velocidad angular Ω. ¿Cuál es el significado físico del Hamiltoniano en este caso?

Problema 6: Para una partícula, calcular los *paréntesis de Poisson* formados por:

a) las componentes cartesianas del momento lineal $\vec{p}$ y del momento angular $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$;

b) las componentes cartesianas del momento angular.

Problema 7: Probar que $[\vec{f}, \vec{n} \cdot \vec{M}] = -\vec{n} \times \vec{f}$, donde $\vec{f} = f_1\,\vec{r} + f_2\,\vec{p} + f_3\,(\vec{r} \times \vec{p})$ con f_1, f_2 y f_3 arbitrarios y $\vec{n}$ es un versor en la dirección de $\vec{M}$.

Problema 8: Mostrar que si el Hamiltoniano y una cantidad F son constantes de movimiento para un determinado sistema mecánico, entonces $\partial F/\partial t$ tambien es una constante de movimiento.

Como ilustración considerar el movimiento de una partícula libre de masa m. El Hamiltoniano se conserva y considerar como constante de movimiento adicional: $F = x - p\,t/m$. Mostrar por cálculo directo que la constante de movimiento $\partial F/\partial t$ coincide con $[H, F]$.

Problema 9: Demostrar por cálculo directo que $[f,g]_{p,q} = [f,g]_{P,Q}$, si (p,q) y (P,Q) están ligados por una transformación canónica.

Problema 10: Probar que una rotación en el espacio de fases de un sistema con un grado de libertad, es una transformación canónica.

Problema 11: Mostrar que la transformación:

$$Q = \ln\left(\frac{\operatorname{sen} p}{q}\right), \qquad P = q \operatorname{cotan} p$$

es canónica.

Problema 12: Considerar la transformación de coordenadas:

$$Q = \ln(1 + \sqrt{q}\,\cos p), \qquad P = 2\,(1 + \sqrt{q}\,\cos p)\sqrt{q}\operatorname{sen} p\ .$$

a) Demostrar que (Q,P) son variables canónicas si (q,p) lo son.

b) Mostrar que la función que genera esta transformación es:

$$F(Q,p) = -\left(e^{Q} - 1\right)^2 \tan\, p\ .$$

Problema 13: Resolver el problema del oscilador armónico lineal utilizando las variables canónicas (P,Q), obtenidas a partir de la función generatriz:

$$F = \frac{m}{2}\,\omega\, q^2 \operatorname{cotan} Q$$

Problema 14: ¿Qué condición debe satisfacer la función $\Phi(q,P)$ para que sea posible utilizarla como función generatriz de una transformación canónica? Considerar en particular el ejemplo: $\Phi(q,P) = q^2 + P^2$.

Problema 15: ¿Qué significado tiene la transformación canónica originada por la función generatriz: $\Phi(q,P) = \alpha\, q\, P$?

Problema 16: Resolver el movimiento de un proyectil puntual en el espacio bajo la influencia de una fuerza gravitatoria uniforme, usando el método de Hamilton-Jacobi. Encontrar la ecuación de la trayectoria y la dependencia de las coordenadas con el tiempo.

Problema 17: Utilizando la ecuación de Hamilton-Jacobi, calcular las ecuaciones de movimiento y la trayectoria de una partícula en el campo: $U(\vec{r}) = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(x^2 + y^2\right)$.