Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

Métodos Matemáticos de la Física

Guía N°1: Álgebra Lineal

Problema 1: Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores arbitrarios en un espacio vectorial con producto interno. Demuestre la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$(\vec{a}\cdot\vec{a})\,(\vec{b}\cdot\vec{b}) \geq |\vec{a}\cdot\vec{b}|^2$$

Determine cuando es válida la igualdad.

Ayuda: Utilice el vector: $\vec{c} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ y exija que $\vec{c}\cdot\vec{c} \geq 0$, $\forall\lambda$.

Considere una base ortonormal $\{\vec{e}_i\}$ en un espacio vectorial de dimensión infinita. Por cuestiones de convergencia, el desarrollo de un vector arbitrario en términos de la base:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{\infty} x^i\,\vec{e}_i$$

puede carecer de significado. No obstante, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, demuestre la desigualdad de Bessel:

$$\sum_{i=1}^{n} |x^i|^2 \leq \vec{x}\cdot\vec{x}$$

resultado que es válido para todo n, por grande que este sea.

Problema 2: Siendo A, B y C matrices cuadradas, probar que:

$$\begin{array}{lrcl}
\textbf{a)} & (\mathsf{AB})^{-1} & = & \mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}^{-1} \\
\textbf{b)} & \widetilde{(\mathsf{AB})} & = & \tilde{\mathsf{B}}\tilde{\mathsf{A}} \\
\textbf{c)} & (\mathsf{AB})^{\dagger} & = & \mathsf{B}^{\dagger}\mathsf{A}^{\dagger} \\
\textbf{d)} & \mathrm{Tr}(\mathsf{ABC}) & = & \mathrm{Tr}(\mathsf{BCA}) \\
\textbf{e)} & \det(\mathsf{AB}) & = & \det(\mathsf{A})\det(\mathsf{B}).
\end{array}$$

Problema 3: Supongamos que las matrices A y B son hermiteanas y las matrices C y D son unitarias. Demostrar que:

$$\begin{array}{lrl}
\textbf{a)} & \mathsf{C}^{-1}\mathsf{AC} & \text{es hermiteana} \\
\textbf{b)} & \mathsf{C}^{-1}\mathsf{DC} & \text{es unitaria} \\
\textbf{c)} & i(\mathsf{AB}-\mathsf{BA}) & \text{es hermiteana.}
\end{array}$$

Problema 4: Sea $\mathcal{T}: V \to V$ la transformación lineal dada por $\mathcal{T}(\vec{x}) = c\vec{x}$, donde c es un escalar fijo. Demostrar que $\mathcal{T}$ es unitaria si y sólo si $|c| = 1$.

Si V es un espacio unidimensional, demostrar que las únicas transformaciones unitarias en V son las descriptas anteriormente. En particular, si V es un espacio real unidimensional, existen sólo dos transformaciones ortogonales, $\mathcal{T}(x) = x$ y $\mathcal{T}(x) = -x$.

Problema 5: Las siguientes matrices 2×2 en $\mathcal{C}$:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = i\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

son las matrices de Pauli. Probar que:

a) $\sum_{lm} \epsilon_{klm}\sigma_l\sigma_m = 2i\sigma_k$. Es decir que puede utilizarse la notación: $\vec{\sigma} \times \vec{\sigma} = 2i\vec{\sigma}$, con $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$.

b) $\sigma_j^2 = \mathsf{I}$, $\forall j$; donde I es la matriz identidad.

c) El conjunto de matrices de Pauli mas I forman una base para el espacio de matrices 2×2.

Problema 6: Dada la transformación de semejanza $\mathsf{A}' = \mathsf{S}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{S}$, probar que:

a) $\mathrm{Tr}(\mathsf{A}') = \mathrm{Tr}(\mathsf{A})$

b) $\det(\mathsf{A}') = \det(\mathsf{A})$

c) Si A es hermiteana y S unitaria entonces A' es hermiteana

d) Si A es ortogonal y S ortogonal entonces A' es ortogonal

e) Si A es unitaria y S unitaria entonces A' es unitaria

Dada una función analítica f, es usual utilizar la notación $f(\mathsf{A})$, donde A es una matriz cuadrada, para representar al desarrollo en serie de Taylor de f "evaluado" en A:

$$f(\mathsf{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, \mathsf{A}^n$$

Utilizando esta notación pruebe que:

i) $f(\mathsf{A}') = \mathsf{S}^{-1} f(\mathsf{A})\mathsf{S}$

ii) $\det(e^{\mathsf{A}}) = e^{\mathrm{Tr}\,\mathsf{A}}$.

Problema 7: Si los autovectores $\vec{v}_i$, correspondientes a los autovalores λ_i, de la matriz A forman una base, probar que:

a) $\det(\mathsf{A}) = \prod_i \lambda_i$

b) $\mathrm{Tr}(\mathsf{A}) = \sum_i \lambda_i$.

Problema 8: Sea U una matriz unitaria y $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ dos vectores propios de U pertenecientes a los autovalores λ_1, λ_2, respectivamente. Demostrar que:

i) $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$

ii) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $x_1^\dagger x_2 = 0$

Problema 9: Encontrar los autovalores y autovectores normalizados de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Problema 10: En una dada base $\{\vec{e}_i\}$ de un espacio vectorial abstracto, una transformación lineal y un dado vector de dicho espacio, quedan respectivamente determinados por:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Encontrar las representaciones matriciales de la transformación y del vector en una nueva base tal que la antigua queda representada por:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 11: Escribir la matriz A y el vector $\vec{x}$ en la base en la cual A es diagonal.

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ i \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$$

Problema 12: Demostrar cada una de las siguientes proposiciones relativas a una matriz A, $n \times n$, real y ortogonal:

a) Si λ es un autovalor real de A, entonces $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$.

b) Si λ es un autovalor complejo de A, el complejo conjugado λ^* también es autovalor de A.
Es decir, los autovalores de A no reales son conjugados a pares.

c) Si n es impar, A tiene por lo menos un autovalor real.

Problema 13: Sea V un espacio euclídeo real de dimensión n. Una transformación ortogonal $\mathcal{T} : V \to V$ con determinante igual a 1 se llama rotación. Si n es impar demostrar que 1 es autovalor para $\mathcal{T}$. Esto prueba que toda rotación de un espacio de dimensión impar tiene un eje fijo.

Problema 14: Las cónicas con centro en el origen de un sistema coordenado obedecen la ecuación:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = k$$

a) Escribir la ecuación en forma matricial: $\tilde{\vec{x}}\ \mathsf{M}\ \vec{x} = k$.

b) Encuentre la transformación que diagonaliza M e interprete geométricamente.

c) Ejemplifique con $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 30$.

Problema 15: El tensor de inercia de un cuerpo rígido en un particular sistema de coordenadas está expresado por la matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{3}{4}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{7}{3} & \sqrt{\frac{1}{18}} \\ \sqrt{\frac{3}{4}} & \sqrt{\frac{1}{18}} & \frac{13}{6} \end{pmatrix}$$

Encuentre los momentos principales de inercia y las direcciones de los ejes principales. Recuerde que en un sistema coordenado orientado en la dirección de los ejes principales la matriz asociada al tensor es diagonal.

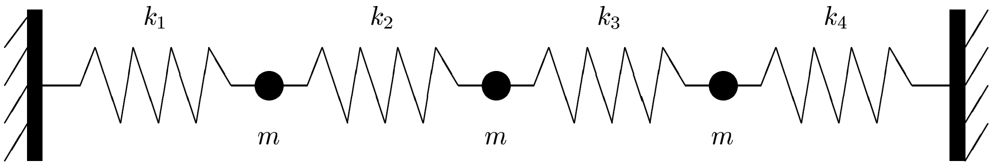
Problema 16: Demostrar que las oscilaciones unidimensionales del sistema mecánico de la figura están regidas por la ecuación vectorial: $m\,\ddot{\vec{x}} = \mathsf{A}\vec{x}$; donde:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -(k_1+k_2) & k_2 & 0 \\ k_2 & -(k_2+k_3) & k_3 \\ 0 & k_3 & -(k_3+k_4) \end{pmatrix}$$

a) Resolver la ecuación mediante la substitución $\vec{x}(t) = e^{i\omega t}\,\vec{y}$, demostrando que esto conduce a un problema de autovalores.

b) Suponiendo que $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$ encontrar las frecuencias de los modos normales de oscilación.

c) Escribir la solución de la ecuación bajo las condiciones iniciales: $x^1(0) = x^2(0) = x^3(0) = x_0$ y $\dot{x}^1(0) = \dot{x}^2(0) = \dot{x}^3(0) = 0$.



Problema 17: Si $\mathcal{T}$ es un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita, **diagonalizable**, probar el teorema de Cayley-Hamilton: *Si f es el polinomio característico de $\mathcal{T}$ entonces $f(\mathcal{T}) = 0$.*
Ayuda: Probar que dado un autovector $\vec{x}$ de $\mathcal{T}$ de autovalor λ, para todo polinomio q se cumple: $q(\mathcal{T})\,\vec{x} = q(\lambda)\,\vec{x}$.

Problema 18: Una transformación lineal $\mathcal{T}$ se llama **nilpotente** si para algún número natural k se cumple que $\mathcal{T}^k = 0$. Probar:

a) Si λ es un autovalor de $\mathcal{T}$ entonces $\lambda = 0$.

b) $\lambda = 0$ es un autovalor de $\mathcal{T}$.

Se concluye entonces que el conjunto de autovalores de un operador nilpotente es exactamente $\{0\}$.

Problema 19: Sea $V = \{p(x), \text{polinomios de grado menor o igual que}(n-1)\}$. Considere sobre este espacio el operador lineal derivación D.

a) Probar que D es nilpotente.

b) Construya la forma de Jordan correspondiente a D.

Problema 20: Si A es una matriz $n \times n$ cuyo polinomio característico resulta: $f(x) = (x-c_1)^{d_1} \ldots (x-c_k)^{d_k}$ con $\sum_{i=1}^{k} d_i = n$. ¿Cual es la traza de A?

Problema 21: Sea A una matriz triangular $n \times n$ tal que ${a^i}_i \neq {a^j}_j$, $\forall i \neq j$. Escribir la forma de Jordan asociada con A.

Problema 22: Escribir las formas de Jordan de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$