Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

Métodos Matemáticos de la Física

Guía N°2: Análisis Tensorial

Problema 1: Si ϵ_{ijk} es el símbolo antisimétrico de Levi-Civita:

a) Demostrar que $\sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$.

b) Calcular $\sum_{ij} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl}$

c) Dada la matriz M, calcular: $\sum_{ijk}\sum_{lmn} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}\mathsf{M}_{il}\mathsf{M}_{jm}\mathsf{M}_{kn}$

Problema 2: Considere un tensor covariante simétrico arbitrario g_{ij}. Mediante g_{ij}, podemos definir una operación de diferenciación covariante. Demostrar que la derivada covariante de g_{ij} definida de esta forma se anula.

Problema 3: Consideremos el símbolo de Christoffel $\left\{ \begin{array}{c} i \\ jk \end{array} \right\}$ formado con la ayuda de un tensor covariante simétrico arbitrario g_{lm}. Demostrar que:

$$\left\{ \begin{array}{c} i \\ ik \end{array} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^k} \ln \sqrt{det\ \mathsf{g}}$$

Problema 4: Se definen las coordenadas α, β, γ mediante las relaciones:

$$x = \beta\gamma, \;\; y = \alpha\gamma, \;\; z = \alpha\beta$$

donde x, y, z son las coordenadas cartesianas. Dada una función arbitraria u, calcular $\nabla^2 u$ en función de las derivadas de u respecto de α, β, γ.

Problema 5: Se definen las coordenadas r, θ, ϕ mediante las relaciones:

$$\begin{aligned} x &= r\ sen\theta\ cos\phi \\ y &= r\ sen\theta\ sen\phi \\ z &= r\ cos\theta \end{aligned}$$

donde x, y, z son las coordenadas cartesianas. Dada una función arbitraria u, calcular $\nabla^2 u$ en función de las derivadas de u respecto de r, θ, ϕ.

Fa.M.A.F ©1995