Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

Métodos Matemáticos de la Física

Guía N°3: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Parte I: Soluciones por Cuadraturas

Problema 1: Verifique que las siguientes ecuaciones diferenciales se reducen a ecuaciones diferenciales de variables separables:

a) $\dfrac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ donde a, b, y c son constantes.

b) $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

c) $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$

Problema 2: Calcular las soluciones particulares de las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables, que satisfacen las condiciones especificadas:

a) $(1 + e^x)\, y\, \dfrac{dy}{dx} = e^x$; $y(x = 0) = 1$.

b) $\dfrac{dy}{dx}\, sen\, x = y\, \ln y$; (i) $y\left(x = \dfrac{\pi}{2}\right) = e$, (ii) $y\left(x = \dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

c) $x^3\, sen\, y\, \dfrac{dy}{dx} = 2$; $y(x \to \infty) = \dfrac{\pi}{3}$.

Problema 3: Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales reducibles a ecuaciones diferenciales homogéneas:

a) $x + y - 2 + (x - y + 4)\, \dfrac{dy}{dx} = 0$.

b) $x + y + 1 + (2\, x + 2\, y - 1)\, \dfrac{dy}{dx} = 0$.

c) $(x^2\, y^2 - 1)\, \dfrac{dy}{dx} + 2\, x\, y^3 = 0$, (Ayuda: Utilizar el cambio de variable $y = z^\alpha$).

Problema 4: Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando la sustitución: $y(x) = u(x)\, v(x)$,

a) $\dfrac{dy}{dx} + 2\, y = x^2 + 2\, x$ (Ecuación lineal inhomogénea).

b) $x^2\, \dfrac{dy}{dx} + 2\, x^3\, y = y^2\, (1 + 2\, x^2)$ (Ecuación de Bernoulli).

Problema 5: Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales teniendo en cuenta si son diferenciales exactas o bien si existe un factor integrante:

a) $x\,(2\,x^2+y^2)+y\,(x^2+2\,y^2)\,\dfrac{dy}{dx}=0.$

b) $(x^2+y)-x\,\dfrac{dy}{dx}=0.$

c) $(x+y^2)-2\,x\,y\,\dfrac{dy}{dx}=0.$

Problema 6: Determine todas las curvas del plano tales que toda recta tangente a cada curva forma siempre con los ejes coordenados un triángulo de area $A=2\,a^2$, siendo a una constante.

Problema 7: Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

a) $x^2\,\dfrac{dy}{dx}+y^2=x\,y\,\dfrac{dy}{dx}$

b) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x\sqrt{1+y^2}}{y\sqrt{1+x^2}}$

c) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a^2}{(x+y)^2}$

d) $\dfrac{dy}{dx}+y\,cos\,x=\dfrac{1}{2}\,sen\,2x$

e) $(1-x^2)\,\dfrac{dy}{dx}-x\,y=x\,y^2$

f) $2\,x^3\,\dfrac{dy}{dx}=1+\sqrt{1+4\,x^2\,y}$

g) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+1=0$

h) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=e^y$

i) $x\,(1-x)\,\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\,\dfrac{dy}{dx}+2\,y=0$

j) $(1-x)\,y^2-x^3\,\dfrac{dy}{dx}=0$

k) $x\,\dfrac{dy}{dx}+y+x^4\,y^4\,e^x=0$

l) $(1+x^2)\,\dfrac{dy}{dx}+y=arctg\,x$

m) $x^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-2\,(x\,y-4)\,\dfrac{dy}{dx}+y^2=0$ (soluciones general y singular)

n) $y\,\dfrac{d^2y}{dx^2}-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-6\,x\,y^2=0$

o) $x^4\, y\, \frac{d^2y}{dx^2} + x^4 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3\, x^3\, y\, \frac{dy}{dx} - 1 = 0$

p) $x^2\, \frac{d^2y}{dx^2} - 2\, y = x$

q) $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\, \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2\, y = sen\, x$

r) $\frac{d^4y}{dx^4} + 2\, \frac{d^2y}{dx^2} + y = cos\, x$

s) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\, \frac{dy}{dx} + 2\, y = \exp\left(e^x\right)$

t) $a^2\, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^3$

u) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\, \frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x}$

Problema 8: En la activación de una lámina de Indio por un flujo constante de neutrones, el número N de átomos radiactivos obedece la ecuación:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda\, N_s - \lambda\, N$$

donde N_s es el número constante que se alcanza luego de la "saturación". Calcular $N(t)$ si $N(t=0)=0$.

Problema 9: Encontrar la solución general de:

$$A(x)\, \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dA}{dx}\, \frac{dy}{dx} + \frac{y(x)}{A(x)} = 0$$

donde $A(x)$ es una fiunción conocida e $y(x)$ es la incógnita.

Problema 10: Calcular la solución general de la ecuación:

$$x\, \frac{d^2y}{dx^2} + 2\, \frac{dy}{dx} + n^2\, x\, y = sen(\omega x)$$

Ayuda: Eliminar el término en derivada primera.

Problema 11: Notar que: $y = x$ es una solución de la ecuación:

$$(1-x)\, \frac{d^2y}{dx^2} + x\, \frac{dy}{dx} - y = (1-x)^2$$

si el segundo miembro se iguala a cero. Use este hecho para obtener la solución general de la ecuación dada.

Problema 12: Considere la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\, \frac{dy}{dx} + q(x)\, y = 0$$

en el intervalo $a \leq x \leq b$. Suponga que se conocen dos soluciones, $y_1(x)$ e $y_2(x)$, tales que:

$$\begin{array}{ll} y_1(a) = 0 & \quad y_2(a) \neq 0 \\ y_1(b) \neq 0 & \quad y_2(b) = 0 \end{array}$$

Dar la solución de la ecuación:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\,\frac{dy}{dx} + q(x)\,y = f(x)$$

que obedece las condiciones $y(a) = y(b) = 0$, en la forma:

$$y(x) = \int_a^b G(x, x')\,f(x')\,dx'$$

donde $G(x, x')$, la llamada función de Green, se construye sólo en términos de las soluciones y_1 e y_2 y asume diferentes formas funcionales para $x' < x$ y $x' > x$.

Ilustrar este problema resolviendo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2\,y = f(x); \quad y(a) = y(b) = 0$$

Parte II: Soluciones en Series de Potencias

Problema 13: Considere la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\,\frac{dy}{dx} + \left(K + \frac{2}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2}\right)\,y = 0$$

$0 \leq x < \infty$, donde l es un entero no negativo.

Encontrar todos los valores de la constante K los cuales generan soluciones finitas en todo el rango de x. Una ecuación como esta se obtiene al resolver la ecuación de Schrödinger para el átomo de Hidrógeno.

Problema 14: ¿Para que valores de la constante K la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{K}{x}\right)\,y = 0$$

$(0 < x < \infty)$ tiene una solución no trivial que se anula para $x \to 0$ y $x \to \infty$?

Problema 15: ¿Para que valores de la constante K la ecuación diferencial:

$$x\,\frac{d^2y}{dx^2} - 2\,x\,\frac{dy}{dx} + (K - 3\,x)\,y = 0$$

posee una solución acotada en el rango $0 \leq x < \infty$?

Problema 16: Se desea una solución de la ecuación diferencial:

$$x\,\frac{d^2y}{dx^2} + 2\,\frac{dy}{dx} + (E - x)\,y = 0$$

tal que $y(0) = 1$, $y(\infty) = 0$. ¿Para que valores de E es esto posible?

Problema 17: La ecuación de Bessel para $m = 0$ es:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + x^2 y = 0$$

Una solución de esta ecuación es:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \cdots$$

Mostrar que existe una segunda solución de la forma:

$$J_0(x) \ln x + A x^2 + B x^4 + C x^6 + \cdots$$

y encuentre los tres primeros coeficientes A, B, C.

Problema 18: Considere la ecuación diferencial:

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + (2 - x) \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

Dar dos soluciones, una regular y de valor 1 en el origen y la otra de la forma:

$$\frac{1}{x} + A(x) \ln x + B(x)$$

donde $A(x)$ y $B(x)$ son regulares en el origen. Dar los primeros tres términos de los desarrollos en serie de $A(x)$ y $B(x)$.

Parte III: Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Problema 19: Encontrar los todos los puntos de equilibrio de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x - x^2 - 2xy \\ \dot{y} &= 2y - 2y^2 - 3xy \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} &= ax - bxy \\ \dot{y} &= -cy + dxy \\ \dot{z} &= z + x^2 + y^2 \end{cases}$$

Problema 20: Considere el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

a) Mostrar que $x = 0$, $y = 0$ es el único punto de equilibrio si: $ad - bc \neq 0$.

b) Mostrar que el sistema posee una línea de puntos de equilibrio si: $ad - bc = 0$.

Problema 21: Encuentre las soluciones de equilibrio de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales y determine si son estables o inestables:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x - x^3 - xy^2 \\ \dot{y} &= 2y - y^5 - x^4 y \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} &= x^2 + y^2 - 1 \\ \dot{y} &= 2xy \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} &= tg(x + y) \\ \dot{y} &= x + x^3 \end{cases}$$

Problema 22: Considere un sistema presa-predador donde el predador posee un medio alternativo de sustento. Este sistema puede ser modelado por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= \alpha_1\, x_1\, (\beta_1 - x_1) + \gamma_1\, x_1\, x_2 \\ \dot{x_2} &= \alpha_2\, x_2\, (\beta_2 - x_2) - \gamma_2\, x_1\, x_2 \end{cases}$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ son las poblaciones al tiempo t de predadores y presas respectivamente y α_i, β_i y γ_i son constantes.

a) Mostrar que el cambio de coordenadas

$$\beta_i\, y_i(t) = x_i\left(\frac{t}{\alpha_i \beta_i}\right)$$

reduce el sistema de ecuaciones a:

$$\begin{cases} \dot{y_1} &= y_1\,(1 - y_1) + a_1\, y_1\, y_2 \\ \dot{y_2} &= y_2\,(1 - y_2) - a_2\, y_1\, y_2 \end{cases}$$

donde

$$a_1 = \frac{\gamma_1 \beta_2}{\alpha_1 \beta_1}; \quad a_2 = \frac{\gamma_2 \beta_1}{\alpha_2 \beta_2}.$$

b) ¿Cuales son las poblaciones de equilibrio estables cuando: (i) $0 < a_2 < 1$, (ii) $a_2 > 1$?

c) Se observa que $a_1 = 3a_2$ (a_2 es una medida de la agresividad del predador). ¿Cuál es el valor de a_2 si el instinto del predador consiste en maximizar su población de equilibrio estable?