**Facultad de Matemática, Astronomía y Física**

**Universidad Nacional de Córdoba**

# Métodos Matemáticos de la Física

## Guía N°4: Distribuciones y Transformadas Integrales

**Problema 1:** Sea la distribución $T_f : C_0^\infty(\Re) \to \Re$, es decir una funcional lineal continua tal que:

$$T_f(g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(x)\, dx; \quad \forall g \in C_0^\infty(\Re)$$

Probar que si $f$ es continua entonces: Soporte$(f)$ = Soporte$(T_f)$.

**Problema 2:** ¿Cómo extendería al concepto de distribución la noción de función par $(f(x) = f(-x))$ y el de función impar $(f(x) = -f(-x))$?. ¿Qué propiedades conserva la extensión?

**Problema 3:** Sea:

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Claramente $g(x)$ es continua pero no diferenciable (en el sentido clásico). Encuentre las tres primeras derivadas de $g$ en el sentido distribucional.

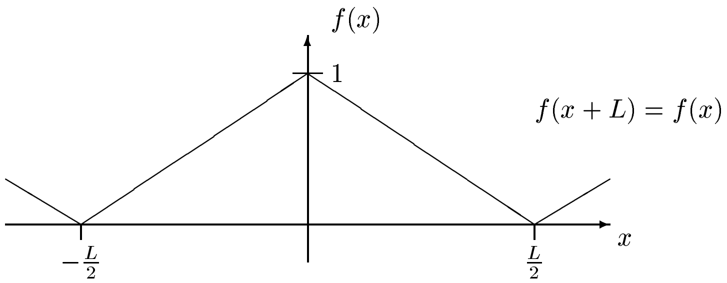
**Problema 4:** La parte principal, en el sentido de Cauchy, de una función:

$$P\left(\frac{1}{x}\right)(f) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{1}{x}\, f(x)\, dx$$

es una distribución. ¿Cómo debe interpretarse la expresión:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{x - x_0 + i\epsilon} = P\left(\frac{1}{x - x_0}\right) - i\pi\delta(x - x_0)?$$

**Problema 5:** Desarrolle la función dibujada a continuación en una serie de Fourier.

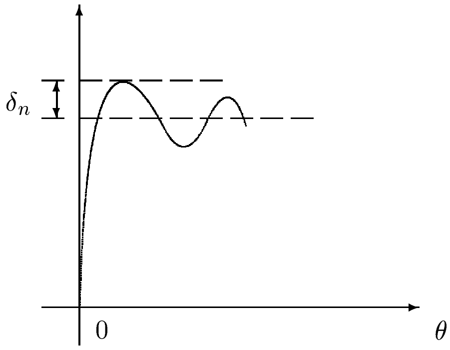


**Problema 6:** Considere la serie de Fourier para la función:

$$f(\theta) = \begin{cases} +1 & 0 < \theta < \pi \\ -1 & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

$f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$.

**a)** A la derecha de $\theta = 0$, la suma de los primeros $n$ términos de la serie lucen como se detalla en la figura a continuación. Encontrar $\delta_n$, el "overshoot" del primer máximo.




**b)** Mostrar que $\lim_{n\to\infty} \delta_n \approx 0.18$. Este comportamiento es conocido como fenómeno de Gibbs.

**Problema 7:** Una función $f(x)$ es igual a $e^{-x}$ para $0 < x < 1$.

**a)** Desarrollle $f(x)$ como una serie de Fourier de la forma $\sum_n B_n \, sen(n\,\pi\,x)$.

**b)** Desarrollle $f(x)$ como una serie de Fourier de período 1.

**Problema 8:** Un sistema lineal es exitado por una señal periódica $f(t)$, tal que $f(t+T) = f(t)$. La respuesta del sistema es tal que una entrada sinusoidal de frecuencia angular $\omega$ es multiplicada por $(\omega_0/\omega)^2$, a menos que $\omega = 0$, en cuyo caso no hay salida. La salida puede ser escrita como:

$$g(t) = \frac{1}{T} \int_0^T G(t - t')\, f(t')\, dt'$$

Calcule la función $G(t)$.

**Problema 9:** ¿De qué función es el desarrollo:

$$\cos\theta + \frac{\cos 3\theta}{9} + \frac{\cos 5\theta}{25} + \ldots$$

una serie de Fourier?

**Problema 10:** Encontrar la derivada generalizada de la siguiente función de período $2\pi$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x) & si & 0 < x \le \pi \\ 0 & si & x = 0 \\ -\frac{1}{2}(\pi + x) & si & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

Verificar que esta función posee el desarrollo en serie de Fourier: $\sum_n \frac{1}{n} sen(nx)$.

Comentario: Derivando término a término esta serie obtenemos la serie divergente: $\sum_n \cos(nx)$. Entonces, el concepto de función generalizada nos permite adscribir un significado a series divergentes en el sentido tradicional.

**Problema 11:** Mostrar que:

$$\int_a^b f(x)\, \delta(g(x))\, dx = \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|}$$

asumiendo que la ecuación $g(x) = 0$ posee una sola raiz en el intervalo $a < x < b$.

**Problema 12:** Evaluar la siguiente expresión:

$$\int_0^\pi dx \int_1^2 dy\ \delta(sen(x))\, \delta(x^2 - y^2).$$

**Problema 13:** Calcular la transformada de Fourier de la función de onda para un electrón 2p en el átomo de hidrógeno:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{32\pi a_o^5}}\ z\ exp\left(-\frac{r}{2a_o}\right)$$

donde $a_o$ es el radio de Bohr y $z$ la coordenada rectangular.

**Problema 14:** Un sistema lineal tiene como respuesta $G(\omega)e^{-i\omega t}$ a una señal de entrada $e^{-i\omega t}$, donde $\omega$ es arbitrario. Si la entrada tiene la forma particular:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-\lambda t} & (t > 0) \end{cases}$$

donde $\lambda$ es una constante fija, la salida resultante es:

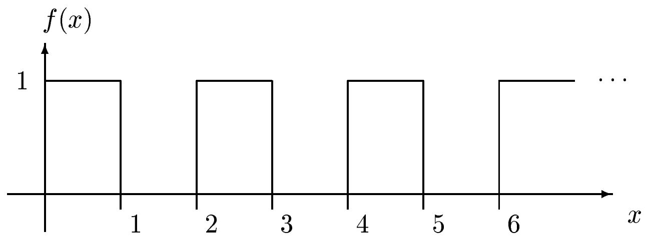
$$F(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ (1 - e^{-\alpha t})e^{-\lambda t} & (t > 0) \end{cases}$$

donde $\alpha$ es otra constante fija.

**a)** Calcular $G(\omega)$.

**b)** Calcular la respuesta del sistema a la entrada $f(t) = A\delta(t)$.

**Problema 15:** Calcular la transformada de Laplace $\mathcal{L}[f(x)]$ de la función dibujada a continuación:



**Problema 16:** Una función $f(x)$ tiene el siguiente desarrollo en serie:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^n}{n!}$$

Escribir la función $g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ en forma cerrada en términos de $f(x)$.

**Problema 17:** Utilizando la representación integral:

$$J_o(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x sen\theta)\, d\theta$$

calcular la transformada de Laplace de $J_o(x)$.

**Problema 18:** ¿De qué función es:

$$\frac{1}{(s^2+1)(s-1)}$$

la transformada de Laplace?

**Problema 19:** Tres nucleos radioactivos decaen sucesivamente en serie, de forma tal que los números $N_i(t)$ de cada tipo obedecen las ecuaciones:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 \quad ; \qquad \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \quad ; \qquad \frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3$$

Si inicialmente $N_1 = N$, $N_2 = 0$, $N_3 = n$, calcular $N_3(t)$ utilizando transformadas de Laplace.