Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

Métodos Matemáticos de la Física

Guía N°5: Funciones Especiales

Problema 1: Sea:

$$f(x) = \begin{cases} +1 & 0 < x < 1 \\ -1 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

Desarrolle $f(x)$ como serie de Polinomios de Legendre $P_l(x)$.

Problema 2: Utilizando una función generatriz, o bien por otro método, evalue la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} P_n(x)$$

donde $P_n(x)$ son los polinomios de Legendre.

Problema 3: Evalue $P_n'(x)$,

a) directamente de la fórmula de Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(x^2 - 1\right)^n \ ;$$

b) a partir de la función generatriz:

$$F(h,z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2hz + h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(z) \ .$$

Problema 4: Verifique la siguiente representación para los armónicos esféricos:

$$Y_{lm}(\Omega) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right)^{\frac{1}{2}} e^{im\phi} (-sen\theta)^m \frac{d^{l+m}}{d(cos\theta)^{l+m}} \left(cos^2\theta - 1\right)^l$$

Problema 5: Los polinomios de Hermite $H_n(x)$ pueden ser definidos por la función generatriz:

$$e^{2hx - h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{h^n}{n!}$$

a) Escribir la relación de recursión que conecta: $H_{n-1}(x)$, $H_n(x)$ y $H_{n+1}(x)$.

b) Evaluar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} H_n(x)\, dx$$

Problema 6: Considere las funciones $f_n(x)$ definidas por:

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} \\
&(b) \quad (n+1)f_{n+1} = x f_n - f_{n+2} \\
&(c) \quad f_n' = f_{n-1}
\end{aligned}
$$

Encontrar una función generatriz $G(x,t)$ tal que:

$$G(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x) t^n$$

Problema 7: Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos soluciones de la ecuación de Bessel (con el mismo m). Mostrar que su Wronskiano tiene la forma:

$$fg' - gf' = \frac{constante}{x}$$

Problema 8: Calcular el Wronskiano de $J_m(x)$ y $Y_m(x)$ (m arbitrario).

Problema 9: Mostrar que la definición:

$$J_m(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\,\Gamma(m+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2r}$$

de los $J_m(x)$ implica que $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$ para todo m entero.

Problema 10: Verificar directamente que:

$$
\begin{aligned}
J_{1/2}(x) &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} senx \\
J_{-1/2}(x) &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} cosx
\end{aligned}
$$