Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

Métodos Matemáticos de la Física

Guía N°6: Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales

Problema 1: Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden, considerando el problema de valores iniciales especificado:

$$\textbf{a)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0\ ; \quad u(x,0) = h(x)$$

$$\textbf{b)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0\ ; \quad u(x,0) = h(x)$$

En el caso **b)**, ¿Hasta que valor del tiempo t se pueden extender las soluciones?

Ayudas:

i) Especifique el campo de direcciones características asociado con cada ecuación.

ii) Considere la curva $\gamma(s) = (s, 0, h(s))$ en $\Re^3$. Obtenga la curva característica $\gamma(s,t)$ que pasa por cada $\gamma(s)$ en $t = 0$, resolviendo la ecuación diferencial ordinaria que determina el campo de direcciones características.

Problema 2: Considere un círculo de radio a con centro en el origen de coordenadas. Sean (r, ϕ) las coordenadas polares y (x, y) las correspondientes coordenadas rectangulares del plano. Calcular la solución del problema de Dirichlet (interior) para la ecuación de Laplace ($\nabla^2 u = 0$) con las siguientes condiciones de contorno:

a) $u(r = a) = A$

b) $u(r = a) = A\ cos\phi$

c) $u(r = a) = A + B\,y$

d) $u(r = a) = A\,x\,y$

e) $u(r = a) = A + B\ sen\phi$

f) $u(r = a) = A\,sen^2\phi + B\,cos^2\phi$; A, B: ctes.

Problema 3: Considere en el problema anterior condiciones de contorno de Neumann: $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_c = f(\phi)$ (interior) para los siguientes casos particulares:

a) $f(\phi) = A$

b) $f(\phi) = A\,x$

c) $f(\phi) = A\,(x^2 - y^2)$

d) $f(\phi) = A\ cos\phi + B$

e) $f(\phi) = A\ sen\phi + B\ sen^3\phi$

Identifique los problemas incorrectamente formulados.

Problema 4: Determinar la distribución estacionaria de la temperatura dentro de la capa esférica $a < r < b$ si la esfera $r = a$ se mantiene a la temperatura T_1 y la esfera $r = b$ a la temperatura T_2.

Problema 5: Calcular la solución de la ecuación de Poisson en el plano:

$$\nabla^2 u(r, \phi) = 1$$

dentro del círculo de radio $r = a$ si $u(r = a) = 0$.

Problema 6: Resolver el problema de las oscilaciones transversales propias de una cuerda homogénea de longitud L si:

a) Los extremos de la cuerda están fijos rígidamente.

b) Los estremos de la cuerda están libres. Es decir $\dfrac{du}{dx} = 0$ en los extremos de la cuerda. Esto tiene lugar cuando los extremos de la cuerda están sujetos mediante anillos (de masas despreciables), que deslizan sin rozamiento sobre barras paralelas.

c) Un extremo de la cuerda está fijo rígidamente y el otro libre.

d) Los extremos de la cuerda están fijos elásticamente, es decir que: $\left.\dfrac{du}{dx}\right|_{x=0,L} - h\,u|_{x=0,L} = 0$.

e) Un extremo de la cuerda está fijo rígidamente y el otro elásticamente.

f) Un extremo de la cuerda está fijo elásticamente y el otro está libre.

Problema 7: En los instrumentos musicales de cuerda percutida (por ejemplo, el piano) las oscilaciones transversales de la cuerda tensa se generan mediante un golpe, que le da a la cuerda una velocidad inicial sin desviación inicial. Si el martillo percutor es plano, rígido y tiene un ancho 2δ, el perfil de velocidad inicial de la cuerda estará dado por:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = \begin{cases} v_o & |x - x_o| < \delta \\ \\ 0 & |x - x_o| > \delta \end{cases}$$

asumiendo que el martillito golpea a una distancia x_o del extremo de la cuerda y que esta tiene un largo L.

a) Determine las oscilaciones de la cuerda $u(x, t)$ para todo $t > 0$, asumiendo que $u_{tt} = c^2\,u_{xx}$.

b) Para la energía de la cuerda oscilando se tiene la expresión:

$$E = \frac{1}{2}\int_0^L \rho\left(c^2 u_x^2 + u_t^2\right) dx$$

donde la densidad $\rho = M/L$, si M es la masa de la cuerda. Calcule la energía asociada con cada modo de oscilación o armónico.

c) Determine en que puntos de la cuerda x_o la percusión **no** excita el m-ésimo modo de oscilación.

d) Bajo la razonable aproximación $\delta << L$ determine cuál es el armónico que más resuena (es decir que posee mayor energía) si se percute la cuerda a una distancia x_o de uno de sus extremos.

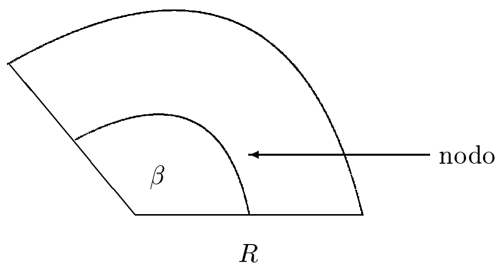
Problema 8: Calcular las oscilaciones propias de una membrana circular,
a) con la frontera fija rígidamente.
b) con la frontera libre.

Problema 9: Calcular la frecuencia más baja de oscilación de una onda acústica en una esfera hueca de radio R. La condición de contorno es: $\left.\frac{\partial \phi}{\partial r}\right|_{r=R} = 0$ y ϕ obedece la ecuación de ondas homogénea.

Problema 10: La cantidad u satisface la ecuación de ondas homogénea dentro de un cilindro de radio a, con la condición de contorno $u = 0$ en las paredes del cilindro. En el extremo $z = 0$ tiene que $u = u_0 e^{-i\omega_0 t}$; es decir, se están enviando ondas a lo largo del tubo con diferentes distribuciones espaciales (modos). Encuentre la velocidad de fase del modo fundamental como función de la frecuencia ω_0 e interprete el resultado para pequeños valores de ω_0.

Problema 11: Encontrar las frecuencias de oscilación más bajas de un parche de tambor en forma de triángulo isósceles recto de lados a, a, $a\sqrt{2}$.

Problema 12: Considere un parche de tambor con la forma de un sector circular de radio R y ángulo β.
a) ¿Cuál modo es el ilustrado en la figura?. Dé su respuesta para $\beta = \pi/2$, π, $3/2\pi$.



b) Esquematice en un gráfico las frecuencias de la primer media docena de modos como funciones de β.

Problema 13: La ecuación que describe las ondas elásticas en un medio isotrópico es:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \vec{a} - \mu\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) = \rho\frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial t^2}$$

donde $\vec{a}$ mide los desplazamientos desde el equilibrio, ρ es la densidad, y λ y μ son las constantes elásticas del medio. Encuentre la frecuencia más baja de oscilación de una esfera elástica isotrópica de radio R, dado que:

a) $\vec{a}(\vec{x})$ es de la forma $f(r)\hat{e}_r$, y

b) la condición de contorno en $r = R$ es:

$$\lambda\nabla \cdot \vec{a} + 2\mu\frac{\partial a_r}{\partial r} = 0$$

Con el fin de calcular un número concreto, considere al final $\lambda = \mu$.

Problema 14: En el exterior de un cilindro infinitamente largo de radio a la función potencial $u(\vec{x}, t)$ satisface la ecuación de ondas. El cilindro se encuentra dividido longitudinalmente, y sobre su superficie

$$u = \begin{cases} u_0 e^{-i\omega_0 t} & (0 < \phi < \pi) \\ -u_0 e^{-i\omega_0 t} & (\pi < \phi < 2\pi) \end{cases}$$

Calcular $u(\vec{x}, t)$ fuera del cilindro, si sólo existen ondas salientes para $r >> a$.

Problema 15: Asuma que la densidad de neutrones n dentro del U_{235} obedece la ecuación diferencial:

$$\nabla^2 n + \lambda n = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial n}{\partial t}$$

a) Encontrar el radio crítico R_0 para el cual una esfera de U_{235} con un radio igual o mayor a dicho valor es inestable, es decir que densidad de neutrones en su interior crece exponencialmente con el tiempo.

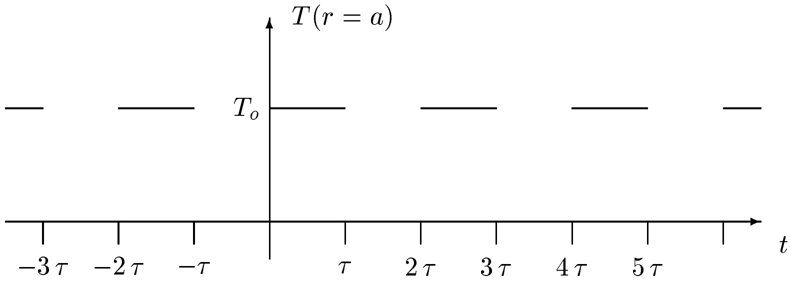
b) Suponga dos hemisferios de U_{235} tales que se encuentren en el límite de estabilidad. Si se juntan para formar una esfera, esta resulta inestable, y se cumple que:

$$n \sim e^{t/\tau}$$

Encontrar la constante de tiempo τ de la explosión resultante.

Problema 16: Una esfera de radio R está uniformemente a temperatura $T = 0$. En el instante $t = 0$, es sumergida en un baño líquido a temperatura constante T_0. Calcular la subsecuente distribución de temperatura $T(\vec{x}, t)$ dentro de la esfera. (Sea κ = conductividad térmica / (densidad $\times$ calor específico)).

Problema 17: La temperatura en una esfera homogénea de radio a obedece la ecuación de difusión con constante κ. Por acciones externas, la temperatura de la superficie de la esfera es forzada a comportarse según lo ilustrado en la figura. Caltular la temperatura $T(t)$ en el centro de la esfera.



Las alteraciones se extienden para $t = \pm\infty$.

Problema 18: Encontrar los tres autovalores más pequeños de la ecuación de Schrödinger para una partícula confinada en una caja cilíndrica de radio a y altura h.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi \quad (\psi = 0 \text{ sobre las paredes}) \quad a \simeq h$$

Problema 19: Utilice la transformada coseno con respecto a y para calcular la distribución de temperatura estacionaria en un sólido semi-infinito ($x > 0$) cuando la temperatura en la superficie ($x = 0$) se mantiene constante e igual a la unidad para $-a < y < a$, y cero fuera de esa franja.

Problema 20: Un alambre recto de radio a es sumergido en un volumen infinito de líquido. Inicialmente el alambre y el líquido tienen temperatura $T = 0$. En $t = 0$, el alambre es súbitamente llevado a la temperatura T_0 y mantenido en ella. Encuentre la transformada de Laplace $F(r, s)$ de la distribución de temperatura $T(r, t)$ resultante en el líquido.

Problema 21: Utilice transformadas de Fourier para calcular el movimiento de una cuerda estirada, infinitamente larga, con desplazamientos iniciales dados $y(x, 0) = \phi(x)$ y velocidad inicial nula. Los desplazamientos satisfacen la ecuación de ondas homogénea.

Problema 22: Las funciones de Green pueden calcularse para ecuaciones diferenciales homogéneas con condiciones de contorno inhomogéneas. Para ilustrar esto, considere la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 u(r,\theta) + k^2\, u(r,\theta) = 0$$

dentro del círculo de radio R, con la condición de contorno dada: $u(R, \theta) = f(\theta)$. La solución puede escribirse como:

$$u(\vec{x}) = \int_0^{2\pi} G(\vec{x}, \theta')\, f(\theta')\, d\theta'$$

Calcule $G(\vec{x}, \theta')$.