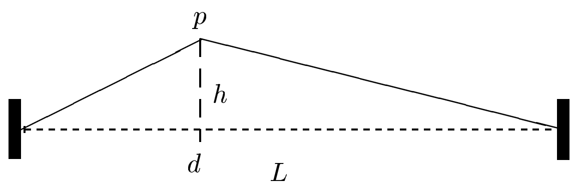
Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

Métodos Matemáticos de la Física

Guía N°7: Ejemplos de Problemas de Examen

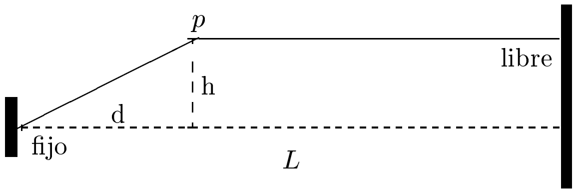
Problema 1: Considere una cuerda estirada con sus extremos fijos, la cual en el instante inicial está sujeta del punto p (ver figura).



a) Indique que condición debe satisfacer la distancia d a un extremo fijo de manera tal que, si la cuerda en reposo se libera de p en un dado instante, en la evolución temporal resultante no se encuentre presente el enésimo modo normal de oscilación. Demuestre que no es posible eliminar el modo fundamental.

b) Grafique la forma de la cuerda en el instante $\bar{T} = L/c$, donde c es la velocidad de propagación de las perturbaciones en la cuerda. Interprete físicamente el tiempo $\bar{T}$.

Problema 2: Considere una cuerda estirada con un extremo fijo y otro libre (desliza sin roce sobre un eje). Si la cuerda es sujeta en p (ver figura), indique que condición debe satisfacer la distancia d al extremo fijo de manera tal que; si la cuerda en reposo se libera de p en un dado instante, en la evolución temporal resultante no se encuentre presente el enésimo modo normal de oscilación. Demuestre que no es posible eliminar el modo fundamental.



Problema 3: Considere un cilindro hueco conductor de radio interior a y exterior b el cual se encuentra a una temperatura $T = 0$ homogénea. En el instante $t = 0$ por el interior del cilindro comienza a circular un fluido con temperatura constante $T = T_0$.
Asumiendo que la superficie exterior del cilindro se mantiene a temperatura constante $T = 0$, que el cilindro es muy largo y que la velocidad del fluido es lo suficientemente grande como para despreciar el tiempo que emplea en llenarlo, calcule la temperatura en todo punto interior de la pared del cilindro para $t \neq 0$.

Asuma ahora que a es muy grande pero $b-a$ se mantiene finito. Calcule cuál es el tiempo característico en la relajación al estado estacionario del cilindro. Explicite sus expresiones con el mayor detalle posible.

Problema 4: Considere un péndulo ideal que cuelga bajo la acción de la gravedad y es perturbado por una fuerza tangente a la trayectoria dada por:

$$F(t) = F_o \cos(\omega\, t)$$

a) Determine en la aproximación de oscilaciones pequeñas el ángulo de desviación del equilibrio utilizando la transformada de Laplace.

b) Indique para qué valores de ω no se mantendrá válida para todo t la aproximación de pequeñas oscilaciones y explique porqué.

Problema 5: Considere una membrana elástica circular de radio R sujeta en su periferia, e inmersa en un medio viscoso que ofrece una resistencia al movimiento proporcional a la velocidad. El movimiento de la membrana resulta así regido por la ecuación:

$$\nabla^2 u - 2\,h\,\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \; .$$

Asumiendo que $R\,h\,c = 5$, determine la solución $u(\vec{r},t)$ de la ecuación para todo $t > 0$ dado que en el instante inicial la membrana se encuentra en reposo y su forma está dada por:

$$u(r, t=0) = A\left(1 - \frac{r}{R}\right) \; .$$

Determine explícitamente los coeficientes de los distintos modos presentes en términos de las constantes del problema; e interprete que clase de evolución temporal satisface cada uno de dichos modos.

Problema 6: Considere una barra semi-infinita homogénea de sección transversal uniforme, cuya superficie se encuentra térmicamente aislada, y su extremo se mantiene siempre a temperatura cero. Si se aplica un pulso de calor a una distancia d del extremo, de manera tal que la distribución de temperatura inicial queda expresada por $T(x, t=0) = \delta(x-d)$ (asumiendo el origen de coordenadas en el extremo de la barra) determine:

a) La distribución de temperatura en la barra para todo $t > 0$.

b) El flujo de calor en el extremo de la barra y en $x = d$ para todo $t > 0$.

Ayudas: La solución del problema con condición de contorno es igual, para $x \geq 0$, a la solución del problema de la barra infinita (sin contorno) pero con una distribución inicial, la cual contempla un adecuado pulso imagen a la izquierda del extremo. La solución del problema infinito puede tratarse mediante una adecuada transformada integral. Verifique que la solución obtenida por este método satisface la condición de contorno especificada.

Problema 7: En los instrumentos musicales de cuerda percutida (por ejemplo, el piano) las oscilaciones transversales de la cuerda tensa se generan mediante un golpe; el cual le da a la cuerda una velocidad inicial sin desviación inicial. Si el martillo percutor es plano, rígido y tiene un ancho 2δ, el perfil de velocidad inicial de la cuerda estará dado por:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = \begin{cases} v_o & |x - x_o| < \delta \\ 0 & |x - x_o| > \delta \end{cases}$$

asumiendo que el martillito golpea a una distancia x_o del extremo de la cuerda y que esta tiene un largo L.

a) Determine las oscilaciones de la cuerda $u(x, t)$ para todo $t > 0$, asumiendo que $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.

b) Para la energía de la cuerda oscilando se tiene la expresión:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \left(c^2 u_x^2 + u_t^2 \right) dx$$

donde la densidad $\rho = M/L$, si M es la masa de la cuerda. Calcule la energía asociada con cada modo de oscilación o armónico.

c) Determine en que puntos de la cuerda x_o la percusión **no** excita el m-ésimo modo de oscilación.

d) Bajo la razonable aproximación $\delta << L$ determine cuál es el armónico que mas resuena (es decir que posee mayor energía) si se percute la cuerda a una distancia x_o de uno de sus extremos.

Problema 8: La aceleración tangencial a_t de un péndulo de masa m y longitud l que cuelga bajo la acción de la gravedad g, viene dada por:

$$ma_t = -m\, g\, sen\alpha - \kappa\, v + F(t)$$

donde α el ángulo de desviación desde la vertical. El término $-\kappa\, v$, donde κ es constante y v es la velocidad del péndulo (con su signo), representa la fuerza de fricción del péndulo con el aire. $F(t)$ es una fuerza periódica externa que perturba el péndulo:

$$F(t) = F_o \cos(\omega_0\, t)$$

A los fines de no tener oscilaciones sobreamortiguadas asuma que el parámetro adimensional:

$$\Lambda = \left(\frac{\kappa}{m}\right)^2 \frac{l}{g}$$

es menor que 1.

a) Escriba en la aproximación de oscilaciones pequeñas la ecuación diferencial que satisface el ángulo de desviación α como función del tiempo.

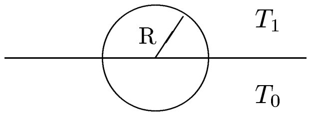
b) Utilizando la transformada integral de Laplace, resuelva la ecuación diferencial bajo las condiciones iniciales: $\alpha(t = 0) = 0$ y $\dot{\alpha}(t = 0) = 0$

c) Explicite su resultado para el caso en que la frecuencia $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Simplifique sus expresiones asumiendo que $\Delta << 1$ y retenga sólo las contribuciones de primer orden en Δ.

i) Determine el tiempo característico asociado con la relajación desde la condición inicial a un regimen estacionario.

ii) Calcule la amplitud y frecuencia del movimiento asintótico resultante.

Problema 9: Un cilindro de radio R, infinitamente largo, se encuentra semi-sumergido en un líquido a temperatura constante T_0, mientras que su parte superior se encuentra expuesto a una atmósfera cuya temperatura es constante igual a T_1. El cilindro a su vez, rota sobre su eje con velocidad angular constante Ω.



La interfase entre el aire y el líquido es perfectamente plana y el eje del cilindro se encuentra sobre ella. El líquido no moja la superficie del cilindro, y en consecuencia no es arrastrado por este en su rotación. El cilindro está fabricado con un material homogéneo cuya conductividad térmica es κ, y el contacto térmico que presenta la superficie del cilindro con ambos medios es perfecto.

a) Determine la distribución de temperatura en todo punto del espacio **en el regimen estacionario** desde el sistema de laboratorio (donde está descripto el problema).

b) En particular, calcule explícitamente la temperatura sobre el eje del cilindro.

Ayudas: En primer lugar considere el problema respecto de un referencial solidario al cilindro. Desde dicho referencial el cilindro se halla en reposo pero la condición de contorno es ahora una función del tiempo que debe determinar. Resuelva la ecuación de conducción del calor mediante una transformada de Fourier en el tiempo, con el fin de evitar la especificación de condiciones iniciales. Para el cálculo de la transformada de Fourier de la condición de contorno conviene previamente calcular la serie de Fourier correspondiente a la dependencia temporal. Finalmente transforme las expresiones al sistema de laboratorio. Tenga presente que las funciones de Bessel de argumento con fase $\frac{3}{4}\pi$ pueden expresarse en término de las funciones reales *ber* y *bei* según:

$$J_n\left(i\sqrt{i}\,x\right) = ber_n(x) + i\ bei_n(x)$$

Problema 10: Considere un parche circular de tambor de radio R inicialmente en reposo al cual se lo percute con una aguja (el area de contacto es despreciable frente a la del parche).

a) Determine en que puntos del parche la percusión genera oscilaciones en las cuales no está presente el segundo modo normal de vibración.

b) Determine en que puntos del parche la percusión genera oscilaciones en las cuales no está presente el cuarto modo normal de vibración.

Considere como primer modo normal al fundamental. Para dar sus respuestas utilice todos los argumentos geométricos y físicos que considere pertinentes para **reducir u omitir** cálculos matemáticos.

Problema 11: Considere un cilindro de radio R, semi-infinito, que se encuentra rodeado por un líquido a temperatura constante $T = 0$, mientras que su tapa (en el plano $z = 0$) está expuesta a una variación periódica de temperatura dada por la función:

$$H(t) = \begin{cases} T_1\,, & n\,T \le t \le \left(n + \frac{1}{2}\right)T \\ \\ T_0\,, & \left(n + \frac{1}{2}\right)T \le t \le (n+1)\,T \end{cases} \qquad (\forall n \text{ entero}).$$

El cilindro está fabricado con un material homogéneo cuya conductividad térmica es κ, y el contacto térmico que presenta toda la superficie del cilindro es perfecto.

a) Determine la distribución de temperatura en el interior del cilindro **en el regimen estacionario**.

b) Calcule el flujo total de calor, promediado en un período, a través de la tapa plana en $z = 0$.

c) Calcule el flujo total de calor, promediado en un período, a través de la superficie lateral del cilindro.

d) Determine la relación entre los resultados de los puntos **b)** y **c)**. Analice el caso particular $T_1 = -T_0$. Explique todas las afirmaciones que realice en este item.

Ayuda: La densidad de flujo de calor (o flujo por unidad de area) a través de una supercie S viene dado por:

$$j = -\frac{\partial T}{\partial n}$$

donde: $\frac{\partial}{\partial n}$ es la derivada normal a la superfie S. El signo resultante en la densidad de flujo así calculada, determina el sentido del flujo de calor a través de la superficie con respecto al sentido del versor $\hat{n}$ normal a la superficie.

Problema 12: A requisito de la barra brava de su club de futbol favorito, un famoso luthier italiano debe construir un corneta cónica cuya frecuencia fundamental sea exáctamente 500 Hz.

a) Determine el espectro de frecuencias correspondiente a los modos normales de vibración de una cavidad cónica de base circular abierta.

b) Calcule las dimensiones de la corneta que debe fabricar el luthier.

Ayudas: A todo fin práctico la corneta es un cono de base circular, fabricado en un material rígido, abierto en el extremo opuesto al vértice. Soplando por un pequeño orificio practicado en el vértice se inducen ondas de presión en el aire. Dichas ondas de presión obedecen la ecuación de ondas usual, en la cual la velocidad de propagación es la velocidad del sonido en el aire: $330\,\dfrac{m}{s}$. Las condiciones de contorno bajo las cuales debe resolverse la ecuación son tales que:

i) El gradiente de presión normal a las paredes rígidas es nulo, y

ii) Sobre el extremo abierto la presión debe mantenerse constante igual a la atmosférica. Esta condición puede simplificarse imponiéndose sobre un casquete esférico con centro en el vértice del cono y radio igual a la generatriz del mismo. Además reescribiendo la ecuación para la variable adecuada, esta es una condición dde contorno homogénea.

Problema 13: En muchas ocasiones, son los miembros adultos de una población de presas quienes son principalmente atacados por los predadores, mientras que los miembros jóvenes se encuentran mejor protegidos de los ataques; o bien por su tamaño más pequeño, o bien porque viven en una región inaccesible a los predadores. Sea x_1 el número de presas adultas y x_2 el número de presas jóvenes en la población de presas, e y el número de predadores. Se cumple que:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -a_1\,x_1 + a_2\,x_2 - b\,x_1\,y \\ \frac{dx_2}{dt} &= n\,x_1 - (a_1 + a_2)\,x_2 \\ \frac{dy}{dt} &= -c\,y + d\,x_1\,y \end{aligned}$$

donde a_1 y c son las tasas de mortalidad por unidad de tiempo de la población de presas y de predadores respectivamente; n es la tasa de natalidad de la población de presas y a_2 es la tasa por unidad de tiempo de promoción de individuos jóvenes a adultos en la población de presas (un individuo se considera adulto cuando está en condiciones de procrear). Por último, b y d son los coeficientes usuales de acople entre las poblaciones de presas y predadores en el modelo de Volterra.

a) Determine todos los puntos de equilibrio del sistema.

b) Establezca bajo que condiciones sobre los coeficientes del problema, es posible que dichos puntos de equilibrio sean estables.

Problema 14: La temperatura de la superficie de la tierra tiene una periodicidad diaria y anual muy marcada. Con el fin de estudiar el problema de la propagación del calor en un terreno, suponga que la tierra es un semi–espacio infinito, homogéneo y uniforme caracterizado por la conductividad térmica κ; y que su superficie es un plano perpendicular al eje coordenado x sobre el cual se tiene una condición de contorno periódica:

$$T(x=0,t) = A\,\cos(\omega_0\,t)$$

a) Resuelva la ecuación de difusión del calor correspondiente a este problema en forma completa (i.e. especificando todas las constantes de la solución).
Ayuda: Dado que se tiene un problema sin condiciones iniciales, es conveniente efectuar una transformada de Fourier en el tiempo de la ecuación y su condición de contorno, antes de proceder a resolverla.

b) Se verifica experimentalmente que la amplitud de las oscilaciones resultantes en el terreno disminuye de manera exponencial con la profundidad; y que existe un retardo entre el tiempo en que ocurre un máximo (o mínimo) en la superficie y el tiempo correspondiente en el que este aparece a una dada profundidad en el terreno. Especifique la constante de atenuación de la amplitud y la diferencia de fase resultante en la solución del problema.

c) En la construcción de una bodega de vino es importante lograr la mayor estabilidad posible en la temperatura durante períodos muy prolongados. Suponiendo que la amplitud térmica anual en la superficie de la tierra es de 19,5^{o}C, calcule la profundidad a partir de la cual debe construirse la bodega para que la amplitud térmica no supere los 2,6^{o}C durante el año. Calcule además el tiempo de retardo entre la temperatura máxima registrada en la superficie y la correspondiente registrada en la bodega. Considere $\kappa = 0,004\, cm^2/s$.

Problema 15: Dada una ecuación diferencial de segundo orden, lineal, de coeficientes constantes y no homogénea:

$$y'' + p_1\, y' + p_2\, y = f(x)$$

donde $f(x)$ es una función periódica (período 2π) dada, desarrollable en serie de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n\, cos(nx) + b_n\, sen(nx)\right)$$

es posible que se admitan soluciones periódicas.

a) A fin de estudiar esta posibilidad, proponga como solución un desarrollo en serie de Fourier:

$$y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n\, cos(nx) + B_n\, sen(nx)\right)$$

y determine bajo que condiciones de los parámetros de la ecuación, existen tales soluciones.

b) Determine si las siguientes ecuaciones admiten soluciones periódicas, y en caso afirmativo construya dichas soluciones.

i) $y'' + y = cosx$ **ii)** $y'' - y = |senx|$

Problema 16: La versión discreta (en la coordenada espacial, pero de tiempo continuo) de la ecuación de difusión, es la correspondiente a las "caminatas aleatorias simétricas":

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = P_{n+1}(t) + P_{n-1}(t) - 2\, P_n(t)$$

con n entero ($-\infty < n < \infty$).

Construya la solución $P_n(t)$ de esta ecuación con la condición inicial $P_n(0) = \delta_{n,o}$.

Ayuda: La solución puede escribirse de la forma: $P_n(t) = f(t)\, B_n(z)$; con $z = z(t)$ y $B_n(z)$ es una apropiada función de Bessel.