Física Moderna II

Guía N°5: Modelo del Electrón Libre

Problema 1: *Distribución de Poisson*

En el modelo de Drude la probabilidad de que un electrón sufra una colisión en un intervalo infinitesimal dt es $\dfrac{dt}{\tau}$.

a) Mostrar que para un electrón tomado al azar en un instante dado, la probabilidad de no haber sufrido ninguna colisión durante los t segundos precedentes es $\exp(-t/\tau)$. Mostrar que la probabilidad de no sufrir ninguna colisión durante los próximos t segundos es la misma.

b) Mostrar que la probabilidad de que el intervalo de tiempo entre dos colisiones sucesivas de un electrón esté entre t y $t + dt$ es $(dt/\tau)\exp(-t/\tau)$.

c) Mostrar que como consecuencia de **a)**, en cualquier instante, el tiempo medio transcurrido desde la última colisión o el que trancurrirá hasta la próxima colisión es τ.

d) Mostrar que como consecuencia de **b)**, el tiempo medio entre colisiones sucesivas de un electrón es τ.

Usando indiscriminadamente el resultado del item **c)**, podemos concluir que, en cualquier instante, el tiempo medio T entre la última y la próxima colisión es 2τ. Esta apreciación condujo a una famosa paradoja y es el origen del error cometido por Drude en el cálculo de las conductividades en los metales.

Problema 2: *Efecto de calentamiento Joule*

Considere un metal a temperatura uniforme en un campo eléctrico estático y uniforme $\vec{E}$. Un electrón sufre una colisión y, tras un intervalo t, una segunda colisión. En el modelo de Drude la energía no es conservada durante las colisiones, ya que la velocidad media de un electrón que emerge de una colisión no depende de la energía que éste adquirió bajo la acción del campo desde la colisión precedente.

a) Muestre que la energía media perdida (entregada a los iones) en la segunda de dos colisiones separadas por un intervalo de tiempo t, es $(eEt)^2/2m$. (El promedio se toma sobre las posibles direcciones en que el electrón emerge de la primera colisión).

b) Muestre que la energía media cedida a los iones por electrón y por colisión es $(eEt)^2/m$, y por lo tanto la pérdida media por unidad de volumen y tiempo es $(ne^2\tau/m)E^2 = \sigma E^2$. Deduzca que la potencia disipada en un alambre de longitud L y sección transversal A es I^2R, donde I es la corriente total y R la resistencia del alambre.

Problema 3: *Conductividad elécrica ac*

a) Usando la ecuación de movimiento clásica para los electrones en un metal, bajo la acción de un campo eléctrico externo $E(t)$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{\vec{p}}{\tau} = -e\vec{E}(t)$$

donde τ es el tiempo de relajación, muestre que la conductividad eléctrica *ac* a frecuencia ω es:

$$\sigma(\omega) = \sigma_0 \, \frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}$$

donde $\sigma_0 = ne^2\tau/m$ es la conductividad eléctrica *dc*.

b) Grafique las componentes real e imaginaria de la conductividad *ac* como funciones de la frecuencia ω; y grafique tambien la componente imaginaria como función de la componente real. Indique como se recorre esta última curva cuando se barre en frecuencia ($\omega : 0 \to \infty$).

Problema 4: *Densidades de niveles y de estados*

a) Calcule la densidad de niveles cuánticos en el espacio $\vec{k}$ para un gas de electrones libres contenidos en:

i) una caja unidimensional de longitud L.

ii) una caja bidimensional cuadrada de lado L.

iii) una caja tridimensional cúbica de arista L.

b) Calcule la densidad de estados en función de la energía $g(\epsilon)$ para los tres casos. Analize e interprete el comportamiento para $\epsilon \to 0$.

Problema 5: *He^3 líquido*

El átomo de He^3 tiene spin $1/2$ y por lo tanto es un fermión. La densidad de estados del He^3 líquido es de $0.081\, g.cm^{-3}$ cerca del cero absoluto. Calcule la energía de Fermi ϵ_F y la temperatura de Fermi T_F. Compare con un gas de electrones libres.

Problema 6: *Susceptibilidad de Pauli*

Analize la contribución del spin de los electrones de conducción a la susceptibilidad magnética de un metal (a $T = 0$). Para ello considere un campo magnético aplicado $\vec{H}$ y descomponga la densidad de estados total $g(\epsilon)$ como suma de una $g_\uparrow(\epsilon)$ de electrones con spin paralelo al campo y una $g_\downarrow(\epsilon)$ de electrones con spin antiparalelo.

Escriba la magnetización $\vec{M}$ en función del número de spines up y down; analize cuanto vale ahora la energía de un electrón y como se llenan los estados hasta el nivel de Fermi. Tenga en cuenta que aún para campos muy grandes ($\sim 10^4$ Gauss) la energía magnética $\mu_B H$ es sólo del orden de $10^{-4}\epsilon_F$.

Obtenga entonces una relación entre $\vec{M}$ y $\vec{H}$ y calcule la susceptibilidad $\chi = \dfrac{dM}{dH}$.