**Facultad de Matemática, Astronomía y Física**

**Universidad Nacional de Córdoba**

# Física Moderna II

## Guía N°7: Vibraciones del Cristal Armónico

**Problema 1:** *Cadena lineal diatómica*

Considere una cadena lineal en la cual se alternan iones de masa $M_1$ y $M_2$, y sólo interactúan los vecinos más cercanos.

**a)** Mostrar que la relación de dispersión para los modos normales es:

$$\omega(k)^2 = \frac{K}{M_1 M_2}\left(M_1 + M_2 \pm \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2M_1 M_2 \cos(ka)}\right)$$

**b)** Discutir la forma de la relación de dispersión y la naturaleza de los modos normales cuando $M_1 >> M_2$.

**c)** Comparar la relación de dispersión obtenida con la de una cadena lineal monoatómica cuando $M_1 \sim M_2$.

**Problema 2:** *Cadena Lineal con interacción a m-ésimos vecinos*

Re-examinar la teoría de las cadenas lineales monoatómicas asumiendo interacciones hasta el m-ésimo vecino; así la ecuación de movimiento para el átomo en la posición $na$ resulta:

$$M\frac{d^2u(na)}{dt^2} = \sum_{m>0} K_m \left[u((n+m)a) + u((n-m)a) - 2u(na)\right]$$

**a)** Mostrar que la relación de dispersión debe ser generalizada según:

$$\omega(k) = 2\sqrt{\sum_{m>0} K_m \frac{sen^2\left(\frac{1}{2}mka\right)}{M}}$$

**b)** Mostrar que en el límite de longitudes de onda larga se tiene que:

$$\omega(k) = a\sqrt{\sum_{m>0} m^2\,\frac{K_m}{M}}\ \ |k|$$

asumiendo que $\sum_{m>0} m^2 K_m$ converge.

**Problema 3:** *Cristal iónico unidimensional*

Considere una cadena de iones de igual masa y cargas $q$ de signos alternados. El potencial interatómico será suma de dos contribuciones:

**a)** Una de corto alcance (vecinos cercanos) y constante de fuerza $\gamma$,

**b)** una interacción coulombiana entre los iones.

Mostrar que la contribución de la interacción coulombiana a la constante de fuerza atómica es:

$$C_p = \frac{2(-1)^p q^2}{p^3 a^3}$$

donde $a$ es la distancia entre primeros vecinos.

Mostrar tambien que la relaciónde dispersión puede ser escrita como:

$$\frac{\omega(k)^2}{\omega_0^2} = sen^2\left(\frac{ka}{2}\right) + \sigma \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p^3}\,(1 - \cos(p\,k\,a))$$

donde:

$$\omega_0^2 = \frac{4\gamma}{M} \;\; y \quad \sigma = \frac{q^2}{\gamma a^3}$$

**Problema 4:** *Calor específico de un sólido bidimensional*

**a)** Construya una expresión para el calor específico debido a los fonones en un sólido bidimensional que obedece al esquema de Debye y analice el comportamiento a bajas y altas temperaturas.

**b)** Determine la contribución al calor específico del sólido bidimensional debida a los electrones, asumiendo el modelo de electrón libre.

**c)** Determine la temperatura para la cual son comparables los calores específicos electrónicos y de red. Confronte con el caso tridimensional.