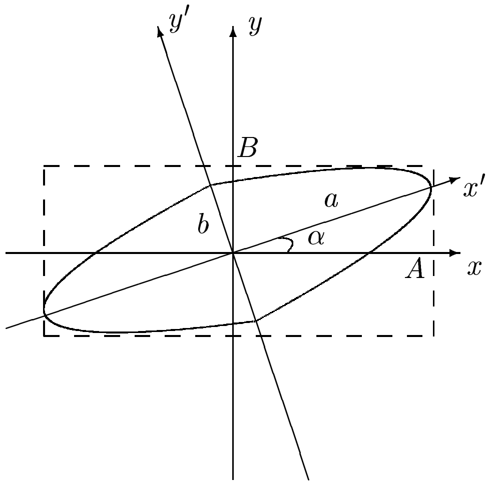
ELIPSE



Ecuación en el sitema primado:

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\alpha \\ \mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \mathrm{sen}\alpha \\ -\mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x'^2 = x^2 \cos^2\alpha + y^2 \,\mathrm{sen}^2\alpha + 2\,x\,y\;\mathrm{sen}\alpha\,\cos\alpha$$

$$y'^2 = x^2 \,\mathrm{sen}^2\alpha + y^2 \cos^2\alpha - 2\,x\,y\;\mathrm{sen}\alpha\,\cos\alpha$$

Ecuación en el sistema no primado:

$$x^2\left(\left(\frac{\cos\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{sen}\alpha}{b}\right)^2\right) + y^2\left(\left(\frac{\mathrm{sen}\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{\cos\alpha}{b}\right)^2\right) - x\,y\,\mathrm{sen}2\alpha\left(-\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 1$$

$$x^2(a^2\,\mathrm{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha) + y^2(b^2\,\mathrm{sen}^2\alpha + a^2\cos^2\alpha) - x\,y\,\mathrm{sen}2\alpha\,(a^2 - b^2) = a^2b^2 \tag{1}$$

• Valor extremo de y: B

$$2\,x\,(a^2\,\mathrm{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha) + 2\,y\,y'\,(b^2\,\mathrm{sen}^2\alpha + a^2\cos^2\alpha) - (y + x\,y_x)\,\mathrm{sen}2\alpha\,(a^2 - b^2) = 0$$

$$y_x = 0 \implies y\;\;\mathrm{sen}2\alpha\,(a^2 - b^2) = 2\,x\,(a^2\,\mathrm{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)$$

$$x_B = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{sen}2\alpha\,(a^2 - b^2)}{(a^2\,\mathrm{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)}\;B$$

• Valor extremo de x: A

$$2\,x\,x_y\,(a^2\,\mathrm{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha) + 2\,y\,(b^2\,\mathrm{sen}^2\alpha + a^2\cos^2\alpha) - (x + y\,x_y)\,\mathrm{sen}2\alpha\,(a^2 - b^2) = 0$$

$$x_y = 0 \implies x\;\;\mathrm{sen}2\alpha\,(a^2 - b^2) = 2\,y\,(b^2\,\mathrm{sen}^2\alpha + a^2\cos^2\alpha)$$

$$y_A = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{sen}2\alpha\,(a^2 - b^2)}{(b^2\,\mathrm{sen}^2\alpha + a^2\cos^2\alpha)}\;A$$

Cálculos auxiliares:

$$a^2\ \mathrm{sen}^2\alpha + b^2\ \cos^2\alpha = b^2 + (a^2 - b^2)\ \mathrm{sen}^2\alpha$$
$$b^2\ \mathrm{sen}^2\alpha + a^2\ \cos^2\alpha = b^2 + (a^2 - b^2)\ \cos^2\alpha$$

$$(a^2\ \mathrm{sen}^2\alpha + b^2\ \cos^2\alpha)\ (b^2\ \mathrm{sen}^2\alpha + a^2\ \cos^2\alpha) = a^2\, b^2 + \frac{1}{4}\,(a^2 - b^2)^2\ \mathrm{sen}^2 2\alpha$$
$$(a^2\ \mathrm{sen}^2\alpha + b^2\ \cos^2\alpha)\ (b^2\ \mathrm{sen}^2\alpha + a^2\ \cos^2\alpha) - (a^2 - b^2)^2\ \mathrm{sen}^2 2\alpha = 4\ a^2\, b^2$$

Resulta entonces:

$$A^2 = b^2\ \mathrm{sen}^2\alpha + a^2\ \cos^2\alpha$$
$$B^2 = a^2\ \mathrm{sen}^2\alpha + b^2\ \cos^2\alpha$$

$$a^2\ \mathrm{sen}^2\alpha + b^2\ \cos^2\alpha = \frac{1}{A^2}\ \left(a^2\, b^2 + \frac{1}{4}\,(a^2 - b^2)^2\ \mathrm{sen}^2 2\alpha\right)$$
$$b^2\ \mathrm{sen}^2\alpha + a^2\ \cos^2\alpha = \frac{1}{B^2}\ \left(a^2\, b^2 + \frac{1}{4}\,(a^2 - b^2)^2\ \mathrm{sen}^2 2\alpha\right)$$

Substituyendo en (**??**):

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 - x\, y\ \frac{(a^2 - b^2)\ \mathrm{sen}2\alpha}{a^2\, b^2 + \frac{1}{4}\,(a^2 - b^2)^2\ \mathrm{sen}^2 2\alpha} = \frac{a^2\, b^2}{a^2\, b^2 + \frac{1}{4}\,(a^2 - b^2)^2\ \mathrm{sen}^2 2\alpha} \qquad (2)$$

Definiendo: $H = \dfrac{A^2 - B^2}{AB}$:

$$\begin{aligned}
A^2 - B^2 &= (a^2 - b^2)\ \cos 2\alpha \\
A^2 B^2 &= a^2\, b^2 + \frac{1}{4}\,(a^2 - b^2)^2\ \mathrm{sen}^2 2\alpha \\
\frac{A^2 - B^2}{A^2 B^2} &= \frac{(a^2 - b^2)\ \mathrm{sen}2\alpha}{a^2\, b^2 + \frac{1}{4}\,(a^2 - b^2)^2\ \mathrm{sen}^2 2\alpha}\ \frac{1}{\mathrm{tg}\,2\alpha} = \frac{H}{AB} \\
1 - \frac{1}{4}\,H^2\,\mathrm{tg}^2\,2\alpha &= \frac{a^2\, b^2}{a^2\, b^2 + \frac{1}{4}\,(a^2 - b^2)^2\ \mathrm{sen}^2 2\alpha}
\end{aligned}$$

Entonces definiendo: $\cos\epsilon = \dfrac{1}{2}\ H\ \mathrm{tg}\,2\alpha$, resulta que la ecuación (**??**) puede escribirse según:

$$\boxed{\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 - 2\ \frac{x}{A}\ \frac{y}{B}\ \cos\epsilon = \mathrm{sen}^2\epsilon}$$

Nota: Ver Polarización Elíptica en: Hecht, *Optics*, Chap.8.

Aplicación: Propagación del rayo extraordinario en una placa plano-paralela de calcita:

Una sección principal de un cristal de calcita contine el eje óptico, el cual forma con la cara de incidencia un ángulo $\alpha = 45.5°$. Bajo incidencia normal sobre el cristal, el rayo ordinario (cuya polarización es normal a la sección principal) no se refracta, mientras que el rayo extraordinario (cuya polarización está sobre la sección principal) encuentra un medio inhomogéneo para el cual la velocidad de propagación a lo largo del eje óptico ($v_\perp$) es menor que la velocidad en la dirección perpendicular al eje ($v_\|$). La dirección resultante para el rayo extraordinario forma un ángulo ϕ con la normal a la cara, tal que se cumple:

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{y_A}{A}$$

Tomando $x = A$ en la ecuación de la elipse:

$$\left(\frac{y_A}{B}\right)^2 - 2\,\frac{y_A}{B}\cos\epsilon + 1 - \operatorname{sen}^2\epsilon = 0$$

De lo cual resulta:

$$\frac{y_A}{B} = \cos\epsilon$$

y por lo tanto:

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{B}{A}\cos\epsilon = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{B^2}{A^2}\right)\operatorname{tg}2\alpha$$

Sustituyendo según:

$$a = v_\| = \frac{c}{1.4864} \qquad b = v_\perp = \frac{c}{1.6584}$$

resulta finalmente:

$$\boxed{\phi = 6.25°}$$