Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

Física General IV: Óptica

Guía N°4: Ondas

Problema 1: ¿Cuántas ondas de luz "amarilla" ($\lambda = 580\,\mathrm{nm}$) caben en una distancia en el espacio igual al grueso de una hoja de papel ($0.07\,\mathrm{mm}$)? ¿Qué tan lejos se extenderá el mismo número de microondas, para las cuales $\nu = 10^{10}\,\mathrm{Hz}$?

Problema 2: Utilizando las funciones de onda:

$$\psi_1 = 4\,\mathrm{sen}\,2\pi\,(0.2\,x - 3\,t) \qquad y \qquad \psi_2 = \frac{\mathrm{sen}(7\,x - 3.5\,t)}{2.5}$$

donde el tiempo está en segundos y x en metros, determinar en cada caso: **a)** frecuencia, **b)** longitud de onda, **c)** período, **d)** amplitud, **e)** velocidad de fase y **f)** dirección del movimiento ondulatorio.

Problema 3: Mostrar que la función: $y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \phi)$, satisface la ecuación diferencial de ondas y corresponde a un movimiento armónico simple en la dirección vertical. Explicar el significado físico de las constantes k, ω y ϕ.

Problema 4: Determinar cuál de las siguientes expresiones describen ondas "viajeras" (en propagación):

$$\begin{array}{rlcl}
\textbf{a)} & \psi(y,t) & = & \exp\left[-\left(a^2y^2 + b^2t^2 - 2abty\right)\right] \\
\textbf{b)} & \psi(z,t) & = & A\,\mathrm{sen}\left(az^2 - bt^2\right) \\
\textbf{c)} & \psi(x,t) & = & A\,\mathrm{sen}\,2\pi\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{t}{b}\right)^2 \\
\textbf{d)} & \psi(x,t) & = & A\,\cos^2 2\pi\,(t - x)
\end{array}$$

En los casos positivos, dibujar el perfil de la onda y determinar la velocidad y dirección del movimiento.

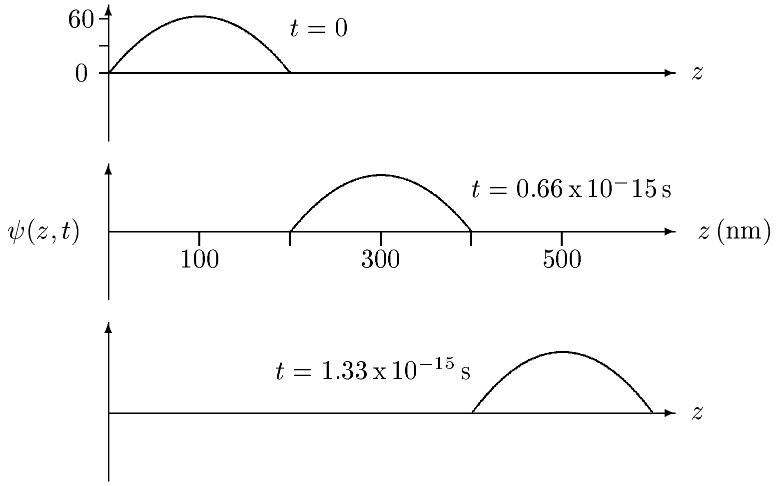
Problema 5: Considar una onda luminosa que tiene una velocidad de fase $3\,\mathrm{x}\,10^8\,\mathrm{m/s}$ y una frecuencia $6\,\mathrm{x}\,10^{14}\,\mathrm{Hz}$.

a) ¿Cuál es la distancia más corta a lo largo de la onda entre dos puntos que tienen una diferencia de fase de 30^o?

b) ¿Qué cambio de fase ocurre en un punto dado del espacio luego de transcurridos $10^{-6}\,\mathrm{s}$?

c) ¿Cuántas ondas han pasado por ese punto en ese lapso de tiempo?

Problema 6:



En la figura se muestra en tres instantes de tiempo sucesivos, el mismo máximo de una onda sinusoidal. Escribir una expresión para la onda. Determinar la longitud de onda, velocidad, frecuencia y período.

Problema 7: A partir de la expresión:

$$\psi(x,y,z,t) = A\ \exp\left[i\left(k_x x + k_y y + k_z z \mp \omega t\right)\right]$$

para una onda plana armónica tridimensional, verificar que:

$$\psi(x,y,z,t) = A\ \exp\left\{i\left[k\left(\alpha x + \beta y + \gamma z\right) \mp \omega t\right]\right\}$$

donde α, β y γ son los cosenos directores de $\vec{k}$, y se cumple: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Problema 8: Mostrar que la expresión: $\psi(x,y,z,t) = f(\alpha x + \beta y + \gamma z \mp vt)$, donde $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, la cual corresponde a una función de onda plana de perfil arbitrario, satisface la ecuación de ondas tridimensional asumiendo que f es diferenciable dos veces.

Problema 9: Mostrar que: $\psi(\vec{r},t) = \dfrac{f(r - vt)}{r}$ es una solución de la ecuación de onda tridimensional; y que corresponde a una perturbación esférica centrada en el origen, que se mueve alejándose del origen con velocidad v (f es una función arbitraria dos veces diferenciable).

Problema 10: Mostrar que si $f(\vec{r},t)$ es una solución de la ecuación de ondas, entonces puede expresarse de la forma: $f(\vec{r},t) = U(\vec{r})\, e^{\pm i\omega t}$, donde la función espacial $U(\vec{r})$ satisface la ecuación de Helmholtz: $\nabla^2 U = -k^2 U$. Considere ahora $U(\vec{r})$ una función compleja: $U(\vec{r}) = A(\vec{r})\, e^{ig(\vec{r})}$. Las superficies sobre las cuales la fase de la función compleja $U(\vec{r})$ es una constante, se llaman frentes de onda. Calcular la velocidad de fase de los frentes de onda. Identificar el vector de onda $\vec{k}$ en esta descripción. Comprobar que esta expresión conduce al resultado conocido para el caso de las ondas planas.

Problema 11: Determinar la resultante de la superposición de las ondas paralelas: $E_1 = E_{o1}\ \mathrm{sen}(\omega t + \epsilon_1)$ y $E_2 = E_{o2}\ \mathrm{sen}(\omega t + \epsilon_2)$ cuando $\omega = 120\,\pi$, $E_{o1} = 6$, $E_{o2} = 8$, $\epsilon_1 = 0$ y $\epsilon_2 = \pi/2$. Graficar cada función y la resultante.

Problema 12: Responder:

a) ¿Cuántas longitudes de onda $\lambda_0 = 500\,\mathrm{nm}$, de luz, cubrirán un hueco de $1\,\mathrm{m}$ en el vacío?

b) ¿Cuántas ondas cubrirán el hueco cuando una placa de vidrio de $5\,\mathrm{cm}$ de espesor (n = 1.5) se inserta en la trayectoria?

c) Determinar la diferencia de camino óptico (Λ) entre las dos situaciones.

a) Verificar que Λ/λ_0 corresponde a la diferencia entre las soluciones de (a) y (b) arriba indicadas.

Problema 13: Utilizar la representación compleja para encontrar la resultante de $E = E_1 + E_2$, donde: $E_1 = E_0\ \cos(kx + \omega t)$ y $E_2 = -E_0\ \cos(kx - \omega t)$. Describir la onda compuesta.

Problema 14: Dada la relación de dispersión: $w = ak^2$, calcular tanto la velocidad de fase como la de grupo.

Problema 15: La velocidad de propagación de una onda superficial en un líquido de profundidad mayor a λ, está dada por:

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\Upsilon}{\rho\lambda}}$$

donde g es la aceleración de la gravedad, λ la longitud de onda, ρ la densidad del líquido y Υ su tensión superficial. Calcular la velocidad de grupo de un pulso en el límite de longitudes de onda largas (estas se conocen como ondas de gravedad).

Problema 16: Demostar que la velocidad de grupo se puede escribir según:

$$v_g = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}$$

o bien, según:

$$v_g = \frac{c}{n + \omega\dfrac{dn}{d\omega}}$$