Análisis III

Ayuditas[1] - Práctico 4

Problema 12: Si $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x^2+y^2}$, usar el desarrollo de Taylor de f para calcular $(\partial^3 f/\partial x^2 \partial y)(0,0)$.

La serie exponencial es convergente en todo $\mathbb{R}$.

$$(1) \qquad f(x,y) = (x^2+y^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2+y^2)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2+y^2)^n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\frac{x^{2k}y^{2(n-k)}}{(n-1)!} \ ;$$

El sumando de la serie de Taylor alrededor de $(0,0)$ asociado con la derivada requerida es

$$\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0)\, x^2 y \ ,$$

que no aparece en (1) pues este desarrollo presenta solamente potencias pares de x e y. Por lo tanto la derivada pedida es nula.

Problema 13: Hallar el polinomio de Taylor de grado $2n$ de la función $f(x,y) = \frac{1}{1+xy}$ en $(0,0)$. ¿Qué ocurre con el de grado n?

Recordamos la serie geométrica (de razón q) y su suma

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \ , \quad |q| < 1 \ .$$

Entonces, si $|xy| < 1$,

$$\frac{1}{1+xy} = \sum_{n=0}^{\infty}(-xy)^n = 1 - xy + x^2y^2 - x^3y^3 + \cdots \ .$$

El sumando de grado $2n$ del polinomio de Taylor de f alrededor de $(0,0)$ es

$$\frac{1}{(2n)!}\sum_{k=0}^{2n}\begin{pmatrix} 2n \\ k \end{pmatrix}\left(\frac{\partial^{2n} f}{\partial x^k \partial y^{2n-k}}\right)(0,0)\; x^k y^{2n-k} \ .$$

El cotejo de ambas series indica que las únicas derivadas parciales no nulas en $(0,0)$ son

$$\left(\frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n}\right)(0,0) = (-1)^n (n!)^2 \ , \quad n = 0, 1, 2, \cdots \ .$$

El sumando de orden $2n+1$ es nulo.

El polinomio de Taylor de grado $2m$ es

$$\sum_{k=0}^{m}(-xy)^k \ ,$$

que también es el polinomio de Taylor de orden $2m+1$.

[1] G.A.R.

Problema 14: Probar que $(0,0,0)$ es un punto crítico de $f(x,y,z) = \cos(x^2+yz)$, y analizar si es extremo relativo o no.

f admite derivadas parciales de todo orden que son continuas. Para $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$, tenemos

$$(\nabla f)(\boldsymbol{r}) = -(2x\sin(x^2+yz), z\sin(x^2+yz), y\sin(x^2+yz)) = -\sin(x^2+yz)\ (2x,z,y)\ .$$

Ya que $(\nabla f)(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{0}$ es un punto crítico y $f(\mathbf{0}) = 1$.
El Hessiano está determinado por:

$$f_{xx}(\boldsymbol{r}) = -2\sin(x^2+yz) - 4x^2\cos(x^2+yz)\ ,\quad f_{xy}(\boldsymbol{r}) = -2xz\cos(x^2+yz)\ ,\quad f_{xz}(\boldsymbol{r}) = -2xy\cos(x^2+yz)\ ,$$

$$f_{yy}(\boldsymbol{r}) = -z^2\cos(x^2+yz)\ ,\quad f_{yz}(\boldsymbol{r}) = -\sin(x^2+yz) - yz\cos(x^2+yz)\ ,\ f_{zz}(\boldsymbol{r}) = -y^2\cos(x^2+yz)\ ;$$

y se anula en $\mathbf{0}$. Pero el mapa $\mathbb{R} \ni t \mapsto \cos(t)$ tiene un máximo local y global en $t = 0$ con valor 1. Por lo tanto,

$$f(x,y,z) \leq 1 = f(\mathbf{0})\ ,$$

y esto demuestra que $\mathbf{0}$ es un máximo local y global.

Problema 16: (a) $f(x,y) = x+y$ en el cuadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$. Sumando las desigualdades

$$-1 \leq x \leq 1\ ,\quad -1 \leq y \leq 1\ ,$$

se obtiene

$$-2 \leq x+y \leq 2$$

con igualdad a la izquierda si y sólo si $x = y = -1$ y, a la derecha si y sólo si $x = y = 1$.

(b) $f(x,y,z) = x+y+z$ en la bola de radio 1 centrado en el origen.
El gradiente de f es constante e igual a $(1,1,1)$ asi que no hay puntos críticos interiores.
Método de multiplicadores de Lagrange: $h = f - \lambda g$ con $g(\boldsymbol{r}) = r^2 - 1$. El gradiente de h se anula sii

$$1 = 2\lambda x = 2\lambda y = 2\lambda z\ ,$$

de donde se desprende que $x = y = z$ y luego $x = y = z = \pm 1/\sqrt{3}$. Etc.

Método "elegante": Por compacidad de la bola y continuidad de f, se asume el máximo y el mínimo que están en el borde S (la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$). Sea $\boldsymbol{r}_o = (x_o, y_o, z_o) \in S$ un extremo global (máximo o mínimo). Si $\boldsymbol{r}_o$ tiene dos (o mas) coordenadas distintas entonces sea $\boldsymbol{r}_1$ un vector distinto de $\boldsymbol{r}_o$ cuyas coordenadas son alguna permutación de (x_o, y_o, z_o)[2]. Entonces $f(\boldsymbol{r}_1) = f(\boldsymbol{r}_o)$ ya que f es invariante bajo permutación de las coordenadas. Por lo tanto $\boldsymbol{r}_1$ es otro extremo global del mismo tipo que $\boldsymbol{r}_o$. Pero, para todo $0 < t < 1$ tenemos

$$f(t\boldsymbol{r}_o + (1-t)\boldsymbol{r}_1) = tf(\boldsymbol{r}_o) + (1-t)f(\boldsymbol{r}_1) = f(\boldsymbol{r}_o)$$

de modo que todos los puntos del segmento $\{t\boldsymbol{r}_o + (1-t)\boldsymbol{r}_1 :\ 0 <\leq t \leq 1\}$ son extremos globales. Pero para todo $0 < t < 1$ el punto $t\boldsymbol{r}_o + (1-t)\boldsymbol{r}_1$ es interior a la bola lo que contradice el hecho de que los puntos interiores no son críticos. Esto demuestra que todas las coordenadas de los puntos extremales globales son iguales. Pero entonces tenemos el problema

$$\varphi(s) = f(s,s,s) = 3s\ ,\quad 3s^2 = 1\ ;$$

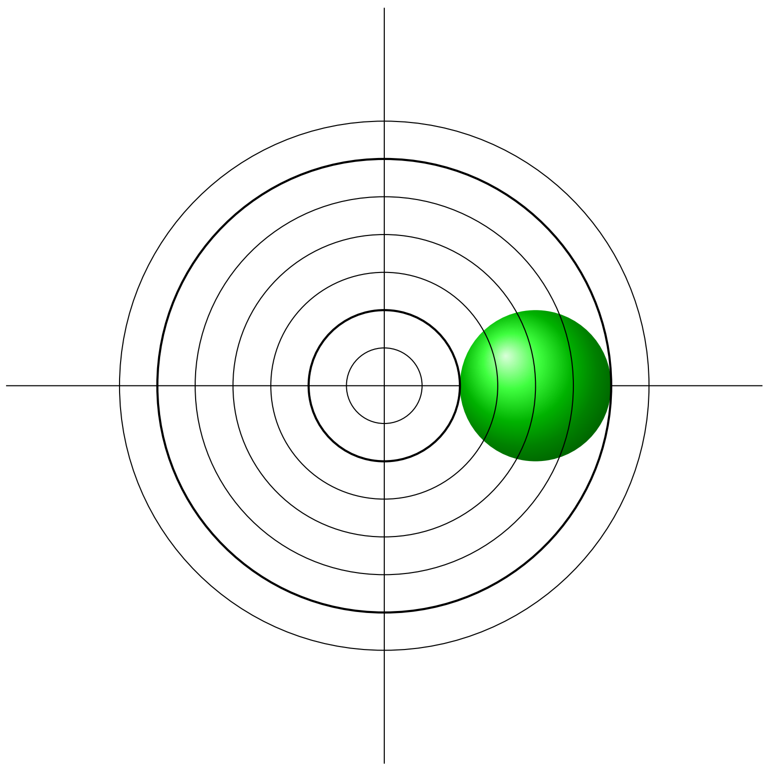
[2] Por ejemplo, si $\boldsymbol{r}_o = (x_o, y_o, z_o)$ con $x_o \neq y_o$, $\boldsymbol{r}_1 = (y_o, x_o, z_o)$

cuya solución es $s = \pm 1/\sqrt{3}$. El máximo global es $(1/\sqrt{3})(1,1,1)$ y $(-1/\sqrt{3})(1,1,1)$ es el mínimo global.

(c) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-1}$ en el disco D de radio 1 centrado en $(2,0)$.
Método "elegante": Las curvas de nivel de f son las circunferencias de radio r (>0) centradas en $(0,0)$ donde f toma el valor $\varphi(r) := r^{-2}$, $r>0$. Estas circunferencias intersectan al disco D para $1 \le r \le 3$. Por lo tanto para $(x,y) \in D$ se tiene $1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 3$ con igualdad a la izq. sii $(x,y)=(1,0)$ y, a la derecha sii $(x,y)=(3,0)$. Entonces

$$1 = \varphi(1) = f(1,0) \le f(x,y) \le f(3,0) = \varphi(3) = 1/9\,,$$

con igualdad a la izquierda si y sólo si $(x,y)=(1,0)$ y, a la derecha si y sólo si $(x,y)=(3,0)$.



Método "directo": Si $(x,y) \in D$, $1 \le x \le 3$ y

$$1 = (x-2)^2 + y^2 = x^2+y^2-4x+4 \iff x^2+y^2 = 4x-3\;;$$

con lo cual

$$f(x,y) = 1/(4x-3)\;,$$

que es una función estrictamente decreciente sobre el intervalo $[1,3]$ de modo que su valor máximo se toma en $x=1$ y su valor mínimo en $x=3$.
Método de Multiplicadores de Lagrange: El gradiente de f es constante e igual a $(1,1,1)$ de modo que f no tiene puntos críticos en D. Consideramos $h(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ donde $g(x,y) = (x-2)^2+y^2-1$. Tenemos, con $r^2 := x^2+y^2$,

(2) $$0 = h_x(x,y) = f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) \iff \frac{-x}{r^4} = \lambda(x-2)\;;$$

(3) $$0 = h_y(x,y) = f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) \iff \frac{-y}{r^4} = \lambda y\;;$$

$$(4) \qquad 0 = h_\lambda(x,y) = -\lambda g_y(x,y)\ .$$

Primeramente, $\lambda \neq 0$ ya que sino $x = y = 0$. Si $y \neq 0$, (3) implica que $\lambda = -1/r^4$ y esto en (2) produce la contradiccón $2/r^4 = 0$. Por lo tanto $y = 0$ que implica que (3) se cumple y, de (4) que $(x-2)^2 = 1$ o sea $\mid x - 2 \mid = 1$ o sea $x = 1$ o $x = 3$. Falta estudiar si los puntos $(1,0)$ y $(3,0)$ son máximos o mínimos. Esto se hace directamente.

(d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}\,xy/3$ en la región $x^2 + 2y^2 \leq 1$.
$\mathbb{E} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (\sqrt{2}y)^2 \leq 1\}$ es una región cerrada cuyo borde es una elipse E centrada en $(0,0)$ con semiejes de largo 1 en el eje 'x', y de largo $1/\sqrt{2}$ en el eje 'y'.
Método de multiplicadores de Lagrange: Se tiene $\nabla f(x,y) = 2(x + \sqrt{2}y/3), y + \sqrt{2}x/3)$ y esto se anula sii $(x,y) = (0,0)$ que es por ende el único punto crítico de f en $\mathbb{R}^2$ y, por lo tanto, en $\mathbb{E}$. El Hessiano de f es constante

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & 2 \end{pmatrix}\ ,$$

y positivo definido ya que la determinante correspondiente no se anula y los elementos diagonales son positivos. Entonces, $(0,0)$ es un mínimo local. ¿Será global? Para contestar esto, observamos que

$$(5) \qquad x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}xy/3 = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}a}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}b}\right)^2\ ,$$

con $a = \sqrt{3/(3+\sqrt{2})}$, $b = \sqrt{3/(3-\sqrt{2})}$. De esto se desprende que $f(x,y) \geq 0$ en $\mathbb{R}^2$ con igualdad sii $(x,y) = (0,0)$. $(0,0)$ es por ende un mínimo global y único[3]. Como no hay otros puntos críticos buscamos máximos y mínimos en el borde. Si $(x_o, y_o) \in E$ es localmente extremal para f en E entonces $(-x_o, -y_o) \in E$ es localmente extremal del mismo tipo de modo que podemos restringir la discusión al borde "superior" $(x, \sqrt{(1-x^2)/2})$ donde

$$\xi(x) := f\left(x, \sqrt{\frac{1-x^2}{2}}\right) = \frac{1}{2}(1+x^2) + \frac{2}{3}x\sqrt{1-x^2}\ ,\ \ -1 \leq x \leq 1\ .$$

Esto es diferenciable salvo en los bordes con derivada

$$\xi'(x) = x\left(1 - \frac{2}{3\sqrt{1-x^2}}\right) + \frac{2\sqrt{1-x^2}}{3}\ ,$$

que cuando se anula implica que x es raíz de la ec. $25x^4 - 25x^2 + 4 = 0$; o sea $x^2 = 4/5$ o bien $x^2 = 1/5$. Encontramos así dos raices de $\xi'(x) = 0$ que son $x_1 2/\sqrt{5}$ y $x_2 = -1/\sqrt{5}$. Entonces hemos determinado los siguientes 2 puntos de la parte superior de E que pueden ser extremales para f en E:

$$\left(\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{1}{10}}\right)\ ,\ \ \left(-\sqrt{\frac{1}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right)\ .$$

En la parte inferior tenemos otros 2 puntos obtenidos de los anteriores cambiando el signo de ambas coordenadas. El análisis de esto nos da que $(2/\sqrt{5}, 1\sqrt{10})$ y $(-2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{10})$ son ambos máximos globales de f en E y, a fortiori, en $\mathbb{E}$; mientras que $(-1/\sqrt{5}, \sqrt{2/5})$ y $(1/\sqrt{5}, -\sqrt{2/5})$ son mínimos globales de f en E. Con un análisis de las derivadas direccionales de f en estos dos últimos puntos vemos que no son mínimos locales de f en $\mathbb{E}$.

[3] Y con (5) nos podríamos haber ahorrado todo lo que hicimos antes.

Problema 17: Hallar los puntos mś lejanos al origen y que estan en la curva $t \mapsto (\cos(t), \mathrm{sen}(t), \mathrm{sen}(t/2))$. El período es 4π ya que tanto el coseno como el seno tienen período 2π mientra que $t \mapsto \sin(t/2)$ es 4π-periodica.Podemos entonces analizar la función para t en el intervalo $[0, 4\pi)$.

$$h(t) = \| (\cos(t), \sin(t), \sin(t/2)) \|^2 = 1 + \sin(t/2)^2$$

que es maximal cuando $| \sin(t/2) | = 1$ o sea $t = (2n+1)\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$. Los puntos mas alejados corresponden a $t_1 = \pi$ y a $t_2 = 3\pi$ y son, respectivamente $(-1, 0, 1)$ y $(-1, 0, -1)$.

Problema 18: Encuentre el valor máximo de la función $x(y+z)$ dado que $x^2 + y^2 = 1$ y $xz = 1$. Los puntos $(0, \pm 1)$ de la circunferencia $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ están excluidos ya que no cumplen con la condición $xz = 1$. Dado $(x, y) \in C$ con $x \neq 0$ se tiene $z = 1/x$ y

$$x(y+z) = 1 + xy = 1 + sx\sqrt{1 - x^2} =: g_s(x) \ , \quad 0 < |x| \leq 1 \ ,$$

donde $s = \pm 1$. Ahora

$$g_s'(x) = s\frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \ ,$$

lo que se anula sii $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Entonces la función tiene máximos globales en

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 2) \ , \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 2) \ ;$$

y mínimos globales en

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 2) \ , \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 2) \ .$$

Problema 19: Una caja rectangular sin tapa debe tener una superficie con un area de 32 unidades cuadradas. Encuentre las dimensiones que le daran volumen maximo.

Si a, b, c son los largos de los lados de la caja, la superficie y el volumen (sin tapa) son, respectivamente

$$S(a, b, c) := ab + 2ac + 2bc \ , \quad V(a, b, c) = abc \ .$$

Esto es considerando solamente la superficie "exterior"; si considero también la superficie interior entonces tengo $2S$ como superficie. El problema es maximizar V en el cono $(\mathbb{R}_+)^3 = \{(a, b, c) : a > 0 \ , \ b > 0 \ , \ c > 0\}$ con la condición $S = \alpha$ $(= 32)$. El gradiente de V es

$$\nabla V(a, b, c) = (bc, ac, ab) \ ,$$

y esto se anula sii (a, b, c) es uno de los tres puntos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ o $(0, 0, c)$ que corresponden a mínimos absolutos (en el borde del cono). Procedemos con el método de multiplcadores de Lagrange considerando la función $H = V - \lambda(S - \alpha)$. Obtenemos

$$bc = \lambda(b + 2c) \ , \quad ac = \lambda(a + 2c) \ , \quad ab = 2\lambda(a + b) \ .$$

Si $\lambda = 0$ entonces encontramos los mínimos anteriores. En caso contrario obtenemos, eliminando λ con las dos primeras relaciones que $a = b$. Luego de la tercera relación obtenemos $\lambda = a/4$. Y de cualquiera de las dos primeras $c = a/2$. Entonces de $S(a, a, a/2) = \alpha$ obtenemos finalmente $a = \sqrt{\alpha/3}$. El maximizador es entonces

$$\sqrt{\frac{\alpha}{3}}(1, 1, 1/2) \ .$$

Problema 20: Encuentre la distancia mínima en $\mathbb{R}^2$ entre la elipse $x^2+2y^2=1$ y la recta $x+y=4$. Indicación: considerar el cuadrado de la distancia como funcion de cuatro variables.

Usamos el método de multiplicadores de Lagrange definiendo

$$f(x,y,u,v) = (x-u)^2 + (y-v)^2 - \lambda(x^2+2y^2-1) + \mu(u+v-4) \ .$$

Entonces

$$f_x = 2(x-u) - 2\lambda x \ , \quad f_y = 2(y-v) - 4\lambda y \ , \quad f_u = 2(u-x) - \mu \ , \quad f_v = 2(v-y) - \mu \ ;$$

de donde se desprende (eliminando μ y luego λ) que los puntos críticos de f satisfacen

$$u - x = v - y \ , \quad x = 2y \ .$$

Con esto, el vínculo $x^2+2y^2=1$, nos da sabiendo que $x>0$ y $y>0$

$$x = \sqrt{2/3} \ , \quad y = \sqrt{1/6} \ ;$$

y del vínculo $u+v=4$ obtenemos

$$u = 2 + \frac{1}{2\sqrt{6}} \ , \quad v = 2 - \frac{1}{2\sqrt{6}} \ .$$

Es muy plausible que esta sea la solución del problema, pero ¿como demostrarlo?

Otro método (directo): Si (x_o,y_o) es un punto de la elipse, la distancia a la recta R –dada por $x+y=4$– se minimiza a lo largo de la perpendicular a R que pasa por (x_o,y_o). Las perpendiculares a R son las rectas

$$y_t(x) = x + t \ , \quad t \in \mathbb{R} \ .$$

Fijando (momentaneamente) t la recta correspondiente intersecta la elipse cuando

$$(x+t)^2 = y_t(x)^2 = \frac{1-x^2}{2} \ ;$$

o sea $3x^2+4tx+2t^2-1=0$ cuyas raices son

$$x_\pm = -\frac{2t}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{3-2t^2} \ , \quad |t| \le \sqrt{3/2} \ .$$

La misma recta intersecta la recta R si $y_t + x = 4$; o sea:

$$x_2 = 2 - t/2 \ .$$

La distancia cuadrada entre $(x_\pm, y_t(x_\pm))$ y $(x_2, y_t(x_2))$ es

$$\xi(t) = (x_\pm - x_2)^2 + (y_t(x_\pm) - y_t(x_2))^2 = 2(x_\pm - x_2)^2 = 2\left(-\frac{2t}{3} \pm \frac{\sqrt{3-2t^2}}{3} - 2 + \frac{t}{2}\right)^2 \ .$$

La derivada es

$$\xi'(t) = 4\left(-\frac{t}{6} \pm \frac{\sqrt{3-2t^2}}{3} - 2\right)\left(\frac{\mp 2t}{3\sqrt{3-2t^2}} - \frac{1}{6}\right) \ ,$$

y se anula exactamente en $t = \mp\sqrt{1/6}$. Es inmediato verificar por medio de la segunda derivada que $x_+(-1/\sqrt{6})$ nos da un mínimo, mientras que $x_-(1/\sqrt{6})$ es un máximo.

Problema 21: Los hiperplanos $x + y - z - 2w = 1$ y $x - y + z + w = 2$ se cortan en un conjunto $\mathcal{F}$ en $\mathbb{R}^4$. Hallar el punto de $\mathcal{F}$ más cercano al origen.
Tenemos

$$w = (x + y - z - 1)/2\ ,\quad w = 2 - x + y - z\ ;$$

de modo que

$$3x - y + z - 5 = 0\ .$$

Por lo tanto

$$\mathcal{F} = \{(x, y, z, 2 - x + y - z) \in \mathbb{R}^4 : 3x - y + z = 5\} = \{\{(x, y, 5 - 3x + y, 2x - 3) \in \mathbb{R}^4 : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}\ .$$

También tenemos

$$\mathcal{F} = \left\{ \underbrace{(0, 0, 5, -3))}_{\boldsymbol{x}_o} + x \underbrace{(1, 0, -3, 2)}_{\boldsymbol{p}_1} + y \underbrace{(0, 1, 1, 0)}_{\boldsymbol{p}_2} :\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}\ .$$

Ahora,

$$d(x, y) := \|(x, y, 5 - 3x + y, 2x - 3)\|^2 = x^2 + y^2 + (5 - 3x + y)^2 + (2x - 3)^2\ ,$$

y

$$d_x(x, y) = 2x - 6(5 - 3x + y) + 4(2x - 3) = 28x - 6y - 42\ ,\quad d_y(x, y) = 2y + 2(5 - 3x + y) = -6x + 4y + 10\ .$$

Este es un sistema lineal con dos incógnitas que se escribe matricialmente como

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -5 \end{pmatrix}\ .$$

Ya que la determinante de la matriz M es 19, la solución es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 21 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27/19 \\ -7/19 \end{pmatrix}\ .$$

Esto es un mínimo pues el Hessiano de d es constante e igual a $2M$ que es positiva definida.

Problema 22: Demuestre, resolviendo un problema adecuado de mínimo, que si $a_k > 0$, $\forall k = 1, 2, \cdots, n$, entonces

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\ .$$

Como todo es positivo, considero

$$\xi(\boldsymbol{a}) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^n - n^n a_1 a_2 \cdots a_n\ ,$$

en el cono $\mathcal{C} := \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n : a_1 > 0\ ,\ a_2 > 0\ ,\ \cdots,\ a_n > 0\}$. Queremos ver que $\xi(\boldsymbol{a}) \geq 0$ para todo $\boldsymbol{a} \in \mathcal{C}$ por lo cual se sugiere minimizar a ξ. Obervamos que si $\boldsymbol{a} = t(1, 1, \cdots, 1)$ con $t > 0$, entonces $\xi(\boldsymbol{a}) = 0$ y la desigualdad se cumple con igualdad. Para determinar los puntos críticos de ξ definimos

$$\sigma(\boldsymbol{a}) := a_1 + a_2 + \cdots + a_n\ ,\quad \pi(\boldsymbol{a}) := a_1 a_2 \cdots a_n\ ,\quad \pi_j(\boldsymbol{a}) := \prod_{k=1,\, k \neq j}^{n} a_k\ ,\quad j = 1, 2, \cdots, n\ .$$

Entonces,

$$\xi_{a_j}(\boldsymbol{a}) = n\sigma(\boldsymbol{a})^{n-1} - n^n\pi_j(\boldsymbol{a}) \ , \ \ j = 1, 2, \cdots, n \ .$$

Los puntos críticos están determinados por

$$\left(\frac{\sigma(\boldsymbol{a})}{n}\right)^{n-1} = \pi_j(\boldsymbol{a}) \ , \ \ j = 1, 2, \cdots, n. \tag{6}$$

Ya que el miembro izquierdo no depende de j y no es nulo, deducimos que todos los π_j son iguales y, de esto, se desprende que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Los puntos críticos de ξ en el cono $\mathcal{C}$ son entonces exactamente los puntos $\boldsymbol{a} = t(1, 1, \cdots, 1)$ con $t > 0$ y para ellos vale $\xi(\boldsymbol{a}) = 0$. Falta verificar que estos puntos crítricos proveen mínimos.

Calculamos el Hessiano H de ξ. Tenemos

$$\xi_{a_j a_k}(\boldsymbol{a}) = \left\{ \begin{array}{ccc} n(n-1)\sigma(\boldsymbol{a})^{n-2} & , & \text{si } j = k \\ n(n-1)\sigma(\boldsymbol{a})^{n-2} - n^n\pi_{jk}(\boldsymbol{a}) & , & \text{si } j \neq k \end{array} \right. = n(n-1)\sigma(\boldsymbol{a})^{n-2} - n^n\pi_{jk}(\boldsymbol{a})(1 - \delta_{jk}) \ ,$$

donde

$$\pi_{jk}(\boldsymbol{a}) := \frac{\pi(\boldsymbol{a})}{a_j a_k} \ , \ \ j, k \in \{1, 2, \cdots, n\} \ , \ \ j \neq k \ .$$

Considere el vector de $\boldsymbol{e} = (1, 1, 1, \cdots, 1) \in \mathcal{C}$ que tiene norma $\sqrt{n}$. Entonces

$$\sigma(t\boldsymbol{e}) = nt \ , \ \ \pi_{jk}(t\boldsymbol{e}) = t^{n-2} \ ,$$

con lo cual

$$H(t\boldsymbol{e}) = n(n-1)n^{n-2}t^{n-2}M - n^n t^{n-2}(M - E) \ ,$$

donde M es la matriz $n\times n$ cuyos elementos de matriz son todos 1. Sea P la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^n$ en el subespacio unidimensional $[\boldsymbol{e}] := \{u\boldsymbol{e} : \ u \in \mathbb{R}\}$ generado por $\boldsymbol{e}$ y sea $Q = E - P$ la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^n$ en el complemento ortogonal de $[\boldsymbol{e}]$. Entonces matricialmente, $P = (1/n)M$ y $Q = E - n^{-1}M$ de modo que

$$H(t\boldsymbol{e}) = n^n t^{n-2} Q \ .$$

Ya que Q es hermítica (o real simétrica) y $Q^2 = Q$, tenemos $\boldsymbol{r} \cdot (Q\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r} \cdot (Q^2\boldsymbol{r}) = (Q\boldsymbol{r}) \cdot (Q\boldsymbol{r}) = \|Q\boldsymbol{r}\|^2 \geq 0$ para todo $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^n$ de modo que Q –y por lo tanto $H(t\boldsymbol{e})$– es positiva semi-definida. Además, los autovalores de $H(t\boldsymbol{e})$ son dos: 0 que es un autovalor simple con autovector $\boldsymbol{e}$ correspondiente ; y $n^n t^{n-2}$ que es un autovalor de multiplicidad $n - 1$ cuyo auto-espacio es el complemento ortogonal de $[\boldsymbol{e}]$. Esto nos devuelve en parte lo que ya sabemos: ξ es constante en el subcono $\{t\boldsymbol{e} : \ t > 0\}$. Pero también nos dice que ξ crece en cualquier dirección distinta de $\pm\boldsymbol{e}/\sqrt{n}$. En efecto, si $\widehat{\boldsymbol{u}}$ es una dirección distinta de $\pm\boldsymbol{e}/\sqrt{n}$ entonces $\widehat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{v} + s\boldsymbol{e}$ con $0 \neq \boldsymbol{v} \in [\boldsymbol{e}]$ y $s \in \mathbb{R}$. Por el Teorema de Taylor, dado $t > 0$ y $\epsilon > 0$, hay un entorno U de $t\boldsymbol{e}$ tal que si $t\boldsymbol{e} + x\widehat{\boldsymbol{u}} \in U$, se tiene

$$|\xi(t\boldsymbol{e} + x\widehat{\boldsymbol{u}}) - \underbrace{\xi(t\boldsymbol{e})}_{=0} - x\underbrace{(\nabla\xi)(t\boldsymbol{e})}_{=\boldsymbol{0}} \cdot \widehat{\boldsymbol{u}} - (x^2/2)\widehat{\boldsymbol{u}} \cdot H(t\boldsymbol{e})\widehat{\boldsymbol{u}}| \leq \epsilon \ ;$$

de donde

$$\xi(t\boldsymbol{e} + x\widehat{\boldsymbol{u}}) \geq -\epsilon + (x^2/2)\widehat{\boldsymbol{u}} \cdot H(t\boldsymbol{e})\widehat{\boldsymbol{u}} = -\epsilon + (x^2/2)\boldsymbol{v} \cdot H(t\boldsymbol{e})\boldsymbol{v} = -\epsilon + (x^2/2)n^n t^{n-2}\|\boldsymbol{v}\|^2 \ ,$$

para $|x|$ lo suficientemente chico. Como ϵ es arbitrario deducimos que $\xi(t\boldsymbol{e} + x\widehat{\boldsymbol{u}}) > 0$. Los puntos críticos $\{t\boldsymbol{e} : \ t > 0\}$ son entonces mínimos locales y, ya que no hay otros puntos críticos, son mínimos globales. Esto completa la demostración de la desigualdad geométrico-aritmética.

Problema 23: Sean

$$\overline{X} = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} x_j \ , \ \ \overline{Y} = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} x_j$$

Con

$$\sigma(m,b) := n^{-1}\sum_{j=1}^{n}(y_j - mx_j - b)^2 \ ,$$

$$\sigma_m(m,b) = -2n^{-1}\sum_{j=1}^{n}(y_j - mx_j - b)x_j = -2(\overline{XY} - m\overline{X^2} - b\overline{X}) \ ,$$

$$\sigma_b(m,b) = -2n^{-1}\sum_{j=1}^{n}(y_j - mx_j - b) = -2(\overline{Y} - m\overline{X} - b) \ .$$

Un punto crítico de σ satisface entonces

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \overline{X} & 1 \\ \overline{X^2} & \overline{X} \end{pmatrix}}_{=D} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Y} \\ \overline{XY} \end{pmatrix} \ ,$$

que son equivalentes a la ecuaciones planteadas. La determinante de la matriz D es $\overline{X}^2 - \overline{X^2}$; pero

$$0 \le n^{-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{X})^2 = n^{-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j^2 - 2\overline{X}x_j + \overline{X}^2) = \overline{X^2} - \overline{X}^2 \ ,$$

con igualdad sii $x_j = \overline{X}$ para $j = 1, 2, \cdots, n$; o sea $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Si esto no es el caso y hay a lo menos dos valores x_j distintos, deducimos que la determinante no se anula (es negativa) y por ende hay un único punto crítico

$$\begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = D^{-1}\begin{pmatrix} \overline{Y} \\ \overline{XY} \end{pmatrix} = \frac{-1}{\overline{X^2} - \overline{X}^2}\begin{pmatrix} \overline{X} & -1 \\ -\overline{X^2} & \overline{X} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{Y} \\ \overline{XY} \end{pmatrix} \ .$$

Por lo tanto,

$$m = \frac{\overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}}{\overline{X^2} - \overline{X}^2} \ , \quad b = \frac{\overline{Y}\,\overline{X^2} - \overline{X}\,\overline{XY}}{\overline{X^2} - \overline{X}^2} \ .$$

Nos falta ver que este único punto crítico corresponde a un mínimo. El Hessiano de σ es constante y está dado por

$$2\begin{pmatrix} \overline{X^2} & \overline{X} \\ \overline{X} & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

cuya determiante es positiva y tiene elementos diagonales positivos. Por lo tanto, el único punto crítico corresponde a un mínimo y este es global.

Problema 24: Desigualdad de Cauchy-Schwarz:
(a) Encuentre máximo y mínimo de la función $\sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ sujeta a las restricciones

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \sum_{j=1}^{n} y_j^2 = 1 \ .$$

(b) Deduzca de (a) la desigualdad de Schwarz:

$$| x \cdot y | \leq \| x \| \| y \| \ , \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n \ .$$

Pruebe además que vale la igualdad si y sólo si x e y son paralelos.

(a) $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$; para aplicar el método de multiplicadores de Lagrange, defino $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \lambda(\|\boldsymbol{x}\|^2 - 1) - \mu(\|\boldsymbol{y}\|^2 - 1)$. Entonces

$$F_{x_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = y_j - 2\lambda x_j \ , \ \ F_{y_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_j - 2\mu y_j \ ;$$

de modo que $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \lambda, \mu)$ es punto crítico de F si

$$y_j = 2\lambda x_j \ , \ \ x_j = 2\mu y_j \ , \ \ j = 1, 2, \cdots, n \ . \tag{7}$$

Multiplicando la primera relación por x_j y sumando sobre j tenemos $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 2\lambda \|\boldsymbol{x}\|^2$, y multiplicando la segunda relación por y_j y sumando sobre j obtenemos $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 2\mu \|\boldsymbol{y}\|^2$. Con esto deducimos (usando que las normas son 1) que $\lambda = \mu$ y con esto regresando a (7) deducimos que $\lambda = \mu = \pm 1/2$ y que, concomitantemente $\boldsymbol{y} = \pm \boldsymbol{x}$.
Si calculamos el Hessiano de f vemos que es constante y suma directa de n bloques (2×2)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Cada uno de estos bloques tiene los autovalores ± 1 con correspondientes autovectores proporcionales a $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$.