Análisis III

Ayuditas[1] - Práctico 5

Problema 1: $T(r,\theta) = (x := r\cos(\theta), y := r\,\mathrm{sen}(\theta))$; $0 < r$, $0 \leq \theta < 2\pi$ mapea $K = (0,\infty)\times[0,2\pi)$ en $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$.
(a) Ya que

$$x_r = \cos(\theta)\ ,\quad x_\theta = -r\,\mathrm{sen}(\theta)\ ,\quad y_r = \mathrm{sen}(\theta)\ ,\quad y_\theta = r\cos(\theta)$$

y estas son funciones continuas sobre K, la derivada $d_{\boldsymbol{u}}T$ (que es una aplicación de K a $\mathbb{R}^2$) está dada matricialmente –con $\boldsymbol{u} = (r,\theta)\in K$– por

$$d_{\boldsymbol{u}}T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} .$$

La determinante correspondiente es igual a r por lo cual $d_{\boldsymbol{u}}T$ es invertible y

$$(d_{\boldsymbol{u}}T)^{-1} = r^{-1}\begin{pmatrix} r\cos(\theta) & r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ -\,\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ -\,\mathrm{sen}(\theta)/r & \cos(\theta)/r \end{pmatrix} .$$

(b) Analizo primero la inyectividad de T. $T(r_1,\alpha) = T(r_2,\beta)$ significa que

$$r_1\cos(\alpha) = r_2\cos(\beta)\ ,\quad r_1\,\mathrm{sen}(\alpha) = r_2\,\mathrm{sen}(\beta)\ ;$$

tomando cuadrados y sumando obtenemos $r_1^2 = r_2^2$ y entonces $r_1 = r_2$. Con esto:

$$\cos(\alpha) = \cos(\beta) \iff (\beta = \alpha)\vee(\beta = 2\pi - \alpha)\ ,$$

$$\mathrm{sen}(\alpha) = \mathrm{sen}(\beta) \iff (\beta = \alpha)\vee(\beta = \pi - \alpha)\vee(\beta = 3\pi - \alpha)\ .$$

Y, de esto $\alpha = \beta$; lo que demuestra que T es inyectiva.

Para determinar la inversa $T^{-1}(x,y) = (r(x,y),\theta(x,y))$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$, observamos que

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r(x,y)^2\cos(\theta(x,y))^2 + r(x,y)^2\,\mathrm{sen}(\theta(x,y))^2} = r(x,y)\ ;$$

y, si $x \neq 0$

(1) $$y/x = \frac{r(x,y)\cos(\theta(x,y))}{r(x,y)\sin(\theta(x,y))} = \tan(\theta(x,y))\ .$$

Para invertir esto debemos tener en cuenta que la función arctan es la función inversa a la función $(-\pi/2,\pi/2)\ni t\mapsto\tan(t)\in\mathbb{R}$ que es estrictamente creciente.
Supongamos que $x > 0$ y $y \geq 0$, entonces $y/x \geq 0$ y $\arctan(y/x)$ cae en el intervalo $[0,\pi/2)$ por lo cual

$$\cos(\arctan(y/x)) = x/r\ ,\quad \mathrm{sen}((\arctan(y/x)) = y/r\ ,$$

de modo que $\theta(x,y) = \arctan(y/x)$.
Si, en cambio, $x < 0$ y $y \geq 0$, tenemos $y/x \leq 0$ y $-\pi/2 < \arctan(y/x) \leq 0$, y $\arctan(y/x)$ no puede ser $\theta(x,y)$. Sin embargo

$$\cos(\arctan(y/x)) =\mid x\mid/r = -x/r\ ,\quad \mathrm{sen}((\arctan(y/x)) = -y/r\ ,$$

por lo cual

$$\cos(\pi + \arctan(y/x)) = \cos(\pi)\cos(\arctan(y/x) = x/r\ ,$$

[1] G.A.R.

$$\operatorname{sen}(\pi + \arctan(y/x)) = \cos(\pi)\sin(\arctan(y/x) = y/r \ ;$$

ya que $\arctan(y/x) \in (\pi/2, \pi]$ tenemos $\theta(x,y) = \pi + \arctan(y/x)$ en el segundo cuadrante. Siguiendo este análisis cuadrante por cuadrante obtenemos $\theta(x,y) = \arg(x,y)$ donde la función arg está definida por

$$\arg(x,y) := \begin{cases} \arctan(y/x) & , \quad x > 0,\, y \geq 0 \\ \pi/2 & , \quad x = 0,\, y > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & , \quad x < 0 \\ 3\pi/2 & , \quad x = 0,\, y < 0 \\ \arctan(y/x) + 2\pi & , \quad x > 0,\, y \leq 0 \end{cases} .$$

Hemos completado la inversión de T:

$$T^{-1}(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, \arg(x,y)) \ , \quad (x,y) \neq (0,0) \ .$$

Ahora, recordando que $\arctan'(t) = (1+t^2)^{-1}$, tenemos

$$r_x = x/r \ , \quad r_y = y/r \ , \quad \theta_x = -y/r^2 \ , \quad \theta_y = x/r^2 \ ,$$

que son funciones continuas de modo que T^{-1} es diferenciable con

$$d_{(x,y)}T^{-1} = \begin{pmatrix} x/r(x,y) & y/r(x,y) \\ -y/r(x,y)^2) & x/r(x,y)^2) \end{pmatrix} .$$

Por lo tanto

$$d_{(x(r,\theta),y(r,\theta))}T^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta)/r & \cos(\theta)/r \end{pmatrix}$$

que coincide con $(d_{(r,\theta)}T)^{-1}$ como lo afirma el Teorema de la Función Inversa.

Problema 4: Este problema es análogo al problema 1.

(a)

$$d_{(r,\phi,\theta)}S = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\operatorname{sen}(\phi) & -r\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) \\ \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi) & r\cos(\theta)\operatorname{sen}(\phi) & r\operatorname{sen}(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 & -r\operatorname{sen}(\phi) \end{pmatrix} ,$$

cuya determinante es $-r^2\operatorname{sen}(\phi)$.

(b) $S^{-1}(x,y,z) = (r(x,y,z), \theta(x,y,z), \phi(x,y,z))$ con

$$r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \ , \quad \theta(x,y,z) = \arg(x,y) \ , \quad \phi(x,y,z) = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) .$$

$$d_{(x,y,z)}S^{-1} = \begin{pmatrix} x/r & y/r & z/r \\ -y/\rho^2 & x/\rho^2 & 0 \\ xz/(\rho r^2) & yz/(\rho r^2) & -\rho/r^2 \end{pmatrix} , \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2} = r\operatorname{sen}(\phi) \ .$$

Problema 7: Sea T_o la transformación del problema 1 (coordenadas polares). Entonces

$$T = D_{a,b} \circ T_o \ ,$$

donde $D_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es el mapa lineal $D_{a,b}(t,s) = (at, bs)$ o, matricialmente

$$D_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} .$$

Luego, por la regla de la cadena

$$dT = dD_{a,b} \circ dT_o = D_{a,b} \circ dT_o \ , \quad (dT)^{-1} = (dT_o)^{-1} \circ (D_{a,b})^{-1} = (dT_o)^{-1} \circ D_{1/a,1/b} \ ,$$

$$T^{-1} = (T_o)^{-1} \circ (D_{a,b})^{-1} = (T_o)^{-1} \circ D_{1/a,1/b} \ , \quad d(T^{-1}) = d((T_o)^{-1}) \circ dD_{1/a,1/b} = d((T_o)^{-1}) \circ D_{1/a,1/b} \ .$$

Con las fórmulas del problema 1,

$$T^{-1}(x,y) = (\sqrt{(x/a)^2 + (y/b)^2}, \arg(x/a, y/b)) \ , \quad (x,y) \neq (0,0) \ ,$$

etc. etc.

Problema 8: Sea T_o la transformación del problema 4 (coordenadas esféricas). Entonces

$$T = D_{a,b,c} \circ T_o \ ,$$

con $D_{a,b,c}(p,s,t) = (ap, bs, ct)$ o, matricialmente

$$D_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} .$$

Luego, con la regla de la cadena y $(D_{(a,b,c)})^{-1} = D_{(1/a,1/b,1/c)}$

$$dT = D_{a,b,c} \circ dT_o \ , \quad (dT)^{-1} = (dT_o)^{-1} \circ D_{1/a,1/b,1/c} \ ,$$

$$T^{-1} = (T_o)^{-1} \circ D_{1/a,1/b,1/c} \ , \quad d(T^{-1}) = d((T_o)^{-1}) \circ D_{1/a,1/b,1/c} \ .$$

Etc., etc.

Problema 9:

Problema 10: El diferencial de $f = (x,y,z)$ es

$$df_{(u,v,w)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2u & 2v & 2w \\ 3u^2 & 3v^2 & 3w^2 \end{pmatrix} ,$$

con determinante $6(v-u)w^2 + 6(w-v)u^2 + 6(u-w)v^2$. $df_{(1,2,-1)}$ tiene determinante 36 e inversa

$$(df_{(1,2,-1)})^{-1} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 4{,}3 + 2{,}12 & -(2{,}3 + 2{,}3) & 2{,}12 - 4{,}3 \\ -(1{,}3 - 1{,}12) & 1{,}3 - 1{,}3 & -(1{,}12 - 1{,}3) \\ 1(-2) - 1{,}4 & -(1.(-2) - 2) & 1{,}4 - 1{,}2 \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/6 & 1/9 & 1/18 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & -1/6 \\ -1/3 & 0 & -1/9 \\ 1/3 & -1/4 & 1/18 \end{pmatrix} .$$

Pero $d(f^{-1})_{f(u,v,w)} = (df_{(u,v,w)})^{-1}$ asi que

$$\frac{\partial v}{\partial y}(2,6,8) = \left[d(f^{-1})_{(2,6,8)}\right]_{22} = \left[(df_{(1,2,-1)})^{-1}\right]_{22} = 0 \ .$$

Problema 11: Observamos que la imagenes de $(t,-t)$ y de $(-t,t)$ son idénticas (e iguales a $(0,-2t^2)$ de modo que en todo entorno de $\mathbf{0}$ hay dos puntos distintos con la misma imagen (elija $|t|$ menor que el radio del entorno) de modo que f no es inyectiva en todo entorno de $(0,0)$. Esto liquida el item (b).
(a)

$$df_{\boldsymbol{x}_o} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} ,$$

con determinante $2\|\boldsymbol{x}_o\|^2$. Por lo tanto $df_{\boldsymbol{x}_o}$ es invertible si $\boldsymbol{x}_o \neq \mathbf{0}$ y, en tal caso se cumplen las hipótesis del Teorema de la Función Inversa.
(c)

$$(df^{-1})_{f(1,2)} = (df_{(1,2)})^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Y,

$$f^{-1}(-3+t,4+s) \approx f^{-1}(-3,4) + (df^{-1})_{(-3,4)}\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (df_{(1,2)})^{-1}\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix} t-2s \\ 2t-s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{t}{10}-\frac{s}{5} \\ 2+\frac{t}{5}-\frac{s}{10} \end{pmatrix} .$$

Problema 12: Si F fuere invertible con inversa F^{-1} diferenciable entonces $d(F^{-1}) = (dF)^{-1}$ pero dF no es invertible ya que, matricialmente, la tercera fila de dF es la suma de las dos primeras filas.

Problema 13: $f(x,y) := (x^3,y^3)$ en $\mathbb{R}^2$ es biyectiva con $f^{-1}(u,v) = (\sqrt[3]{x},\sqrt[3]{y})$. Sin embargo $df_{(0,0)} = 0$ no es invertible.

Problema 14: Derivando obtenemos

$$f'(x) = \begin{cases} (1/2) + 2x\,\mathrm{sen}(1/x) - \cos(1/x) & , \quad x \neq 0 \\ 1/2 & , \quad x = 0 \end{cases} ,$$

y esta función es continua fuera de $x=0$.
Cualquiera sea $\epsilon > 0$ tomando $n \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande como para que $n\pi > 1/\epsilon$ tenemos, con $x_n = 1/(n\pi)$, que $0 < x_n < \epsilon$ y

$$f'(x_n) = \frac{1}{2} - (-1)^n$$

que es positivo $(=3/2)$ si n es par y negativo $(=-1/2)$ si n es impar. En todo entorno de $x=0$ hay puntos con distinto signo de f' y por lo tanto f no puede ser invertible.

Problema 16: Con $g = (g_1,g_2,g_3)$ donde $g_1(x,y,z,u,v) = x^2+y+2z+u-v$, $g_2(x,y,z,u,v) = xy+z-u+2v-1$, $g_3(x,y,z,u,v) = yz+xz+u^2+v$, tenemos $g(1,1,-1,1,1) = (0,0,0)$ y

$$d_{(x,y,z,u,v)}g = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 2 & 1 & -1 \\ y & x & 1 & -1 & 2 \\ z & z & x+y & 2u & 1 \end{pmatrix} ;$$

de modo que la determinante del Jacobiano $(\partial g_j/\partial x_k)_{j,k=1,2,3}$ donde $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ evaluado en $(1,1,-1)$ es

$$det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 .$$

Se satisfacen las hipótesis del Teorema de la Función Implicita de modo que hay un entorno U de $(1,1)$ y una función $f : U \to \mathbb{R}^3$ tal que $g(f(u,v),u,v) = 0$ y $f(1,1) = (1,1,-1)$. Por lo tanto las ecuaciones admiten una solución única en un entorno de $(1,1,-1,1,1)$.

Problema 17: Considerar la ecuación $(x-2)^3 y + xe^{y-1} = 0$.
(a) ¿Esta y definida implcitamente como función de x en un entorno de $(x,y) = (1,1)$?
(b) ¿En un entorno de $(0,0)$?
(c) ¿En un entorno de $(2,1)$?

Si $f(x,y) = (x-2)^3 y + xe^{y-1}$ para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$f_x(x,y) = 3(x-2)^2 y + e^{y-1} \ , \ \ f_y(x,y) = (x-2)^3 + e^{y-1} \ .$$

Ahora $f(1,1) = 0$, $f(0,0) = 0$ y $f(2,1) = 2$; y

$$f_y(1,1) = 0 \ , \ \ f_y(0,0) = -8 + e^{-1} \neq 0 \ , \ \ f_y(2,1) = 1 \ ;$$

de modo que se satisfacen las hipótesis del Teorema de la Función Implicita (TFI) en el caso (b). En el caso (c) deberíamos considerar $f - 2$.
Por lo tanto, en el caso (b), hay entorno U de $x = 0$ y una función $g : U \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable que cumple $f(x,g(x)) = 0$ para todo $x \in U$ y $g(0) = 0$.

Para analizar el caso (a) donde no se cumple la hipótesis del TFI, hago una translación de variables:

$$x = t + 1 \ , \ \ y = s + 1 \ .$$

Para no abusar la notación,

$$\widetilde{f}(t,s) := f(t+1, s+1) = (t-1)^3(s+1) + (t+1)e^s \ ,$$

$$\widetilde{f}_t(t,s) = 3(t-1)^2(s+1) + e^s \ , \ \ \widetilde{f}_s(t,s) = (t-1)^3 + (t+1)e^s \ .$$

Ahora, el punto a analizar es $(t_o, s_o) = (0,0)$. Defino

$$\xi(t) := (1-t)^3/(1+t) \ , \ \ \eta(s) := e^s/(s+1) \ , (t,s) \in I \times I\mathbb{R}^2 \ ,$$

donde $I := (-1/2, 1/2)$. Tenemos,

$$\widetilde{f}(t,s) = 0 \iff \xi(t) = \eta(s) \ .$$

Ahora, tanto ξ como η son funciones positivas en el intervalo I con $\xi(0) = \eta(0) = 1$. Las derivadas son

$$\xi'(t) = \frac{-2(2+t)(1-t)^2}{(1+t)^2} \ , \ \ \eta'(s) = \frac{se^s}{(1+s)^2} \ , \ \ \eta''(s) = \frac{e^s(1+s^2)}{(1+s)^3} \ ;$$

de modo que ξ es decreciente en I mientras que η tiene un mínimo absoluto en $s = s_o = 0$. De esto deducimos, con el Teorema del Valor Medio, que $\xi(t) < 1$ para $t > 0$ en I mientras que $\eta(s) > 1$ para $s \in I$ con $s \neq 0$. En otras palabras $\xi(t) = \eta(s)$ no admite solución si $0 < t \in I$ por lo cual, cualquiera sea el entorno U de $t = 0$ (que automaticamente contiene $t > 0$), no hay ninguna función $g : U \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{f}(t, g(t)) = 0$.

Damos una demostración directa del resultado vía

Lema: *Para $0 \le t$ y $s \ge -1$ se tiene $\widetilde{f}(t,s) \ge te^s$.*

Demostración: Si $0 \le t$, se tiene $(1-t) \le 1$ y por ende $(1-t)^3 \le 1$. Entonces –usando $s+1 \ge 0$– tenemos $(1-t)^3(s+1) \le s+1$ de modo que

$$\widetilde{f}(t,s) = -(1-t)^3(s+1) + (t+1)e^s \ge -(s+1) + (t+1)e^s = te^s + \underbrace{e^s - s - 1}_{=:h(s)} .$$

Pero $s = 0$ es el único punto crítico de h y es un mínimo absoluto ya que $h''(s) = e^s > 0$. Por lo tanto $h(s) \ge h(0) = 0$ con igualdad solamente para $s = 0$. Entonces $f(t,s) \ge te^s$. qed

El lema implica que $f(t,s) \ge te^s > 0$ para todo $t > 0$ y $s \ge -1$. Dado cualquier entorno U de $(0,0)$, $U \cap \{(t,s) : t > 0\,,\ s \ge -1\}$ no es vacio y para todos los puntos (t,s) de la intersección $\widetilde{f}(t,s) > 0$ y, por ende, esos t no determinan ningún s.

Problema 19: Las funciones de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definidas por

$$f_1(x,y,t) = xyt + \operatorname{sen}(xyt)\ ,\quad f_2(x,y,t) = x + y + t\ ,$$

son continuamente diferenciables con derivadas

$$d(f_1)_{(x,y,t)} = (yt(1+\cos(xyt)), xt(1+\cos(xyt), xy(1+\cos(xyt))\ ,\quad d(f_2)_{(x,y,t)} = (1,1,1)\ .$$

Sea

$$J_{(x,y,t)} = \begin{pmatrix} (\partial f_1/\partial x)(x,y,t) & (\partial f_1/\partial y)(x,y,t) \\ (\partial f_2/\partial x)(x,y,t) & (\partial f_2/\partial y)(x,y,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yt(1+\cos(xyt)) & xt(1+\cos(xyt)) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Tenemos

$$det(J_{(x,y,t)}) = t(y-x)(1+\cos(xyt))\ ;$$

y $J_{(0,1,-1)}$ es invertible con inversa

$$(J_{(0,1,-1)})^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Por el Teorema de la función implicita hay un entorno $U \subset \mathbb{R}$ de $t_o = -1$ y una aplicación continuamente diferenciable $g : U \to \mathbb{R}^2$, con $g(-1) = (0,1)$ y tal que $f_1(g(t),t) = f_2(g(t),t) = 0$ para todo $t \in U$. La derivada de g en U es

$$dg_t = -(J_{(g(t),t)})^{-1} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)(g(t),t) \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Problema 20: Especifiquemos el escenario. $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ donde A es abierto, con $F(\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y_o}) = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^n$, F continuamente diferenciable y $F_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o)$ invertible. Hay entonces un entorno U de $\boldsymbol{x}_o$ y una función $f : U \to \mathbb{R}^m$ tal que $f(\boldsymbol{x}_o) = \boldsymbol{y}_o$ y $F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$ para todo $\boldsymbol{x} \in U$.
Sea $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dada por $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$. Tenemos que H es (claramente) continuamente diferenciable y $H(\boldsymbol{x}, F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$ para todo$\boldsymbol{x} \in U$. Para el Jacobiano J de H tenemos

$$J = \begin{pmatrix} E & | & 0 \\ -- & | & -- \\ F_{\boldsymbol{x}} = (\partial F_j/\partial x_k) & | & F_{\boldsymbol{y}} = (\partial F_j/\partial y_k) \end{pmatrix} ,$$

y, como se verá más adelante,

$$det(J) = det(F_{\boldsymbol{y}}) \ .$$

Aplicando el Teorema de la función inversa en $(\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o)$ donde J es invertible obtenemos la inversa G definida en un entorno W de $(\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o)$. Observese que $G_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}$. Tenemos

$$H(\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o) = (\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{0}) \ ;$$

sea

$$U' = G(\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})\} \cap W)$$

que no es vacio. Sea U la proyección de U' sobre $\mathbb{R}^n$. Como G es biyectiva, obtenemos para cada $x \in U$ un único y tal que

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \ ,$$

y

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$$

de modo que

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$$

para todo $x \in U$. La unicidad de $\boldsymbol{y}$ nos define la función $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in U$, requerida que cumple $f(\boldsymbol{x}_o) = \boldsymbol{y}_o$.

Problema 21: Sea $n \geq 2$ sino el resultado es falso. Por hipótesis hay $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tal que $f_{x_j}(\boldsymbol{p}) \neq 0$. Sea $\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^{n-1}$ el vector que se obtiene de $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ omitiendo la j-ésima componente x_j. Ya que $g(x_j, \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{x}}) := f(\boldsymbol{x})$ cumple que $g_{x_j}(p_j, \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{p}}) \neq 0$ y $g(p_j, \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{p}}) = 0$, se satisfacen las hipótesis del Teorema de la Función Implicita y, por ende, hay un entorno U de $\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{p}}$ y una función $h : U \to \mathbb{R}$ tal que $h(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{p}}) = p_j$ y $g(h(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}) = 0$ para todo $\boldsymbol{y} \in U$. En los puntos $\boldsymbol{x}$ tales que $x_j = h(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{x}})$ tenemos entonces $f(\boldsymbol{x}) = 0$ y estos puntos no son denumerables.