Análisis III

Ayuditas[1] - Práctico 2

Problema 4:

a) Evalue en $(x,0)$ y en $(0,y)$.

b) Observe que $\mid x \mid + \mid y \mid \geq \mid x \mid$. Alternativamente, use 1(a) y 1(b) para ver que $\mid f(x,y) \mid \leq \| (x,y) \|$.

c) idem a).

d) idem a).

e) Evalue en $(x, cx^2 - x)$ con $c \neq 0$.

f) Recuerde que $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1$.

g) $f(x,y) = \frac{\sqrt{1+t}-1}{t}$, $t = x^2 + y^2$; aplique la regla de l'Hôpital.Alternativa: muestre que

$$\frac{1}{2\sqrt{1+t}} \leq f(x,y) \leq \frac{1}{2} \,.$$

h) $f(x,y) = (y^2 - x)^3/(y^4 + x^2)$; a partir de

$$\mid (y^2 - x)^3 \mid \leq (y^2 + \mid x \mid)^3 = y^6 + 3y^2x^2 + 3 \mid x \mid y^4 + \mid x \mid^3 \,,$$

poniendo $\boldsymbol{z} = (x, y^2)$ tenemos, con 1(b),

$$y^6 \leq \| \boldsymbol{z} \|^3 \,, \quad y^2x^2 \leq \| \boldsymbol{z} \|^3 \,, \quad y^4 \mid x \mid \leq \| \boldsymbol{z} \|^3 \,, \quad \mid x \mid^3 \leq \| \boldsymbol{z} \|^3 \quad .$$

Alternativa: busque a, b tales que

$$(y^2 + \mid x \mid)^3 \leq (y^4 + x^2)(ay^2 + b \mid x \mid) \,.$$

i) $f(x,y) = t\ln(t)$ con la notación de g); use la regla de l'Hôpital.

j) Evalue en $(x = \alpha z^2, y = \beta z^2, z)$, donde α, β son reales.

k) $x^2y^2z^2 \leq x^2y^2(z^2 + x^2 + y^2)$. Alternativa: use 1(b) para obtener $\mid xyz \mid \leq \| (x,y,z) \|$

Problema 5: Para (a) y (c) tener en cuenta que $\operatorname{sen}(x)$ se anula cuando x es múltiplo entero de π. En (c) recordar 4 (f).

Problema 6: En todos los casos menos (d), la función f está definida fuera del origen como cociente de dos funciones continuas y el denominador no se anula de modo que f es continua fuera del origen. La continuidad en el origen es equivalente a $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{0})$. La situcación en (d) es similar ya que está definida fuera de la recta $x = 0$ como cociente de funciones continuas. La continuidad en $(0, y_o)$ es equivalente a $\lim_{(x,y)\to(0,y_o)} f(x,y) = 0$.

a) $f(x, ax^2) = a/(1 + a^2)$.

---

[1]G.A.R.

b) $0 \leq (| x | - | y |)^2 = x^2 + y^2 - 2 | xy | \leq x^2 + y^2 - | xy |$. O sino, simplemente 1(b).

c) $x^2y^2 \leq \sqrt{\frac{| xy |}{2}} (| x |^3 + | y |^3)$.

d) Use la regla de l'Hôpital o sino demuestre

$$\frac{x}{1-x} \geq e^x - 1 \geq x \ , \ \text{para} \ | x | < 1 \ .$$

e) Aplique 1(b). Sino, demuestre que $| xyz | \leq \sqrt[3]{\frac{| xyz |}{6}} (x^2 + y^2 + z^2)$.

Problema 8:

a) Considere parábolas que pasan por el origen.
Por algún extraño motivo f no está definida en $\{(x, 0) : x \neq 0\}$ (aunque se podría hacerlo por continuidad).

b) Dibuje en el plano las regiones donde f es 1 y donde es -1.

Problema 11: f se anula en $\{(x, 0) : x \neq 0\}$ y en $\{(0, y) : y \neq 0\}$.
Aplique el Teorema de la Función Implicita a $g(x, y) = y - x - \operatorname{sen}(xy)$ en el punto $(0, 0)$.

Porque se trata de un método general para probar que el límite de un cociente no existe, doy una discusión detallada en este caso particular. La función $(x, y) \mapsto g_c(x, y) = y - x - c^{-1} \operatorname{sen}(xy)$, con $c \neq 0$ satisface $g_c(0, 0) = 0$ y

$$\frac{\partial g_c}{\partial y}(x, y) = 1 - x \cos(xy)/c \ , \ \ \frac{\partial g_c}{\partial x}(x, y) = -1 - y \cos(xy)/c$$

que son funciones continuas y, ya que $(\partial g_c/\partial y)(0, 0) = 1$, se cumplen las hipótesis del Teorema de la función implicita. Hay entonces un entorno U de $x = 0$ y una (única) función continuamente diferenciable φ definida en U tal que $\varphi(0) = 0$ y $g_c(x, \varphi(x)) = c$. Pero entonces

$$\lim_{x \to 0} |f(x, \varphi(x))| = \lim_{x \to 0} \left| \frac{\operatorname{sen}(x\varphi(x)}{\varphi(x) - x} \right| = |c| \ ,$$

de modo que el límite de f en $(0, 0)$ no existe pues, si existiere entonces también existiría $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x, y)|$.