Análisis III

Ayuditas[1] - Práctico 3

Problema 4: a) Si las derivadas parciales $(\partial f/\partial x_j)(\boldsymbol{x_o})$ existen, el gradiente es el vector

$$(\nabla f)(\boldsymbol{x}_o) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_o), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_o), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_o) \right) .$$

El mapa $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n \mapsto (\nabla f)(\boldsymbol{x}_o) \cdot \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}$ es lineal. Con esto se obtiene inmediatamente que la existencia del límite es suficiente para la diferenciabilidad. Para probar la necesidad, muestre que si el mapa lineal $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisface

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_o} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_o) - L(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o)}{\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o \|} = 0 ,$$

entonces $L(\boldsymbol{h}) = \sum_{j=1}^n L_j h_j$ donde $L_j = L(\boldsymbol{e}_j) = (\partial f/\partial x_j)(\boldsymbol{x}_o)$.

Problema 5:

a) $f(x,y) = x^{-2} + y^{-2}$ está definida fuera de los ejes cartesianos en $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \;\&\; y \neq 0\}$. Allí la función es diferenciable ya que las derivadas parciales $f_x(x,y) = -2/x^3$ y $f_y(x,y) = -2/y^3$ son continuas.

b) El dominio natural de $g(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ es $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq |y|\}$ que es un doble cono cerrado de vértice $(0,0)$ con borde $\{(x,x) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$. f es diferenciable en el interior de B (B sin los bordes) pues las derivadas parciales $f_x(x,y) = x/f(x,y)$ y $f_y(x,y) = -y/f(x,y)$ son funciones continuas en el interior de B.

c) $h(x,y) = |x + y|$ está definida en todo el plano. Las derivadas parciales fuera de la recta $T := \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$ son:

$$h_x(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{si } x + y > 0 \\ -1 & , \quad \text{si } x + y < 0 \end{cases} , \quad h_y(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{si } x + y \geq 0 \\ -1 & , \quad \text{si } x + y < 0 \end{cases} ;$$

y son funciones continuas en todo $\mathbb{R}^2 \setminus T$. Por lo tanto h es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus T$.
Las derivadas parciales en la recta T no existen ya que:

$$\frac{h(x+t,-x) - h(x,-x)}{t} = \frac{|t|}{t} , \quad \frac{h(x,-x+t) - h(x,-x)}{t} = \frac{|t|}{t} ,$$

y el cociente $|t|/t$ no tiene límite cuando $t \to 0$. A fortiori, h no es diferenciable en T.

Problema 6: Este ejemplo es interesante.

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \,\mathrm{sen}(1/x) & , \quad \text{si } x \neq 0 \\ 0 & , \quad \text{si } x = 0 \end{cases} .$$

(a) Considere las funciones continuamente diferenciables de una variable real:

$$t \mapsto g_1(t) = t \, , \;\; g_1'(t) = 1 \, ; \;\; t \mapsto \mathrm{sen}(t) \, , \;\; \mathrm{sen}'(t) = \cos(t) \, ; \;\; 0 \neq t \mapsto g_2(t) = 1/t \, , \;\; g_2'(t) = -1/t^2 \, .$$

[1] G.A.R.

Fuera del eje "y" $E_y := \{(0,y) \,:\, y \in \mathbb{R}\}$ f es continua como producto de funciones continuas: $(x,y) \mapsto f(x,y) = g_1(x)g_1(x)g_1(y)\operatorname{sen}(g_2(x))$. Ya que $|\operatorname{sen}(t)| \leq 1$, y $|x| \leq \| (x,y) \| \geq |y|$,

$$(1) \qquad |f(x,y)| \leq x^2 \, |y| \leq \| (x,y) \|^3 \,,$$

con lo cual f es también continua en E_y.
(b) Nuevamente, fuera de E_y, f admite derivadas parciales y estas son continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus E_y$; las calculamos en un momentito. Por lo tanto (¡Teorema!), f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus E_y$.
Las derivadas parciales en E_y se determinan directamente:

$$f_x(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,y) - f(0,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 y \operatorname{sen}(1/t)}{t} = 0 \,,$$

por la primera desigualdad de (1);

$$f_y(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,y+t) - f(0,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0 \,.$$

Entonces,

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 2g_1(x)g_1'(x)g_1(y)\operatorname{sen}(g_2(x)) + g_1(x)^2 g_1(y)\cos(g_2(x))g_2'(x) & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2xy\operatorname{sen}(1/x) - y\cos(1/x) & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases} \,,$$

que es discontinua en E_y;

$$f_y(x,y) = \begin{cases} g_1(x)^2 g_1'(y)\cos(g_2(x)) & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2\operatorname{sen}(1/x) & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases} \,,$$

que es continua en todo $\mathbb{R}^2$. Por ahora, no podemos afirmar nada sobre la diferenciabilidad de f en E_y.

(c) Supongamos que f es diferenciable en E_y o sea que hay –para cada $v \in \mathbb{R}$– un mapa lineal $L_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1, v+h_2) - f(0,v) - L_v(h_1,h_2)}{\| (h_1,h_2) \|} = 0 \,.$$

Entonces, deducimos que

$$L_v(a,b) = a f_x(0,v) + b f_y(0,v)$$

y como ambas derivadas parciales son nulas en E_y, L_v es el mapa lineal nulo: $L_v(a,b) = \mathbf{0}$. Veamos directamente la diferenciabilidad; tenemos, con (1) y la desigualdad del triángulo,

$$\left| \frac{f(h_1, v+h_2) - f(0,v)}{\| \boldsymbol{h} \|} \right| = \frac{|f(h_1, v+h_2)|}{\| \boldsymbol{h} \|} \leq \frac{h_1^2 |v+h_2|}{\| \boldsymbol{h} \|} \leq \| \boldsymbol{h} \| \, (|v| + |h_2|) \leq \| \boldsymbol{h} \| \, (|v| + \| \boldsymbol{h} \|) \,,$$

lo que demuestra la diferenciabilidad en E_y. Por lo tanto f es diferenciable en todo su dominio $\mathbb{R}^2$. Tenemos entonces un ejemplo de una función que es diferenciable (en E_y) a pesar de que una de sus derivadas parciales (f_x) es discontinua. Esto verifica que la continuidad de las derivadas parciales es condición suficiente pero no necesaria para la diferenciabilidad.

Problema 8: La hipótesis es que

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{x}_o+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_o)-(\nabla f)(\boldsymbol{x}_o)\cdot\boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|}=0\ .$$

Esto es equivalente a

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{\mid f(\boldsymbol{x}_o+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_o)-(\nabla f)(\boldsymbol{x}_o)\cdot\boldsymbol{h}\mid}{\|\boldsymbol{h}\|}=0\ .$$

Tomese $\boldsymbol{h}=t\boldsymbol{u}$; entonces $\|t\boldsymbol{u}\|=|t|$ y

$$\left|\frac{f(\boldsymbol{x}_o+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{x}_o)}{t}-(\nabla f)(\boldsymbol{x}_o)\cdot\boldsymbol{u}\right|=\left|\frac{f(\boldsymbol{x}_o+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{x}_o)-t(\nabla f)(\boldsymbol{x}_o)\cdot\boldsymbol{u}}{t}\right|$$

$$=\frac{\mid f(\boldsymbol{x}_o+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{x}_o)-(\nabla f)(\boldsymbol{x}_o)\cdot(t\boldsymbol{u})\mid}{\|t\boldsymbol{u}\|}\ .$$

Problema 9: a) Si $\boldsymbol{u}=(\alpha,\beta)$ con $\alpha^2+\beta^2=1$, tendremos para $\alpha\neq\pm\beta$ que

$$\frac{f(t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{0})}{t}=\frac{\alpha\beta}{t(\alpha^2-\beta^2)}\ ,$$

por lo cual la derivada direccional no existe salvo para los dos casos $\alpha=0$ y $\beta=0$; o sea $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_1$ y $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_2$ vale decir las dos derivadas parciales $f_x(\boldsymbol{0})$ y $f_y(\boldsymbol{0})$ que son ambas nulas.
Cuando $\alpha=\pm\beta$, α no se anula y

$$\frac{f(t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{0})}{t}=\frac{0-0}{t}=0$$

de modo que las derivadas direccionales respecto de $\boldsymbol{e}_\pm:=(\boldsymbol{e}_1\pm\boldsymbol{e}_2)/\sqrt{2}$ existen y son nulas.

b) ¡Si f fuere diferenciable entonces las derivadas direccionales existirían todas!

Problema 10: Si $\boldsymbol{u}=(\alpha,\beta)$ es un vector unitario arbitrario,

$$\frac{f(\boldsymbol{0}+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{0})}{t}=\frac{t\alpha\mid t\beta\mid}{|t|t}=\alpha|\beta|\ ,$$

y esto implica que la derivada direccional $f_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{0})$ respecto de $\boldsymbol{u}$ de f en el origen existe (y es igual a $\alpha\mid\beta\mid$).
Si f fuese diferenciable en el origen entonces necesariamente su derivada es el mapa idénticamente nulo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ ya que las derivadas parciales $f_x(\boldsymbol{0})$ y $f_y(\boldsymbol{0})$ son ambas nulas. Pero, con $\boldsymbol{h}=(h_1,h_2)$,

$$\frac{f(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{0})}{\|\boldsymbol{h}\|}=\frac{h_1|h_2|}{h_1^2+h_2^2}\ ,$$

y en el caso especial $h_1=s|h_2|$ con $s\in\mathbb{R}$, este cociente es $s/(1+s^2)$ que es us propio límite y depende de s. Esto demuestra que f no es diferenciable en $\boldsymbol{0}$.

Problema 12: P es un mapa lineal. Demuestre que todo mapa lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es diferenciable y es su propia derivada.

Problema 13: Las funciones $f_1(x,y) = x^2 - y^2$ y $f_2(x,y) = 2xy$ son ambas diferenciables pues tienen derivadas parciales continuas $(f_1)_x(x,y) = 2x$, $(f_1)_y(x,y) = -2y$, $(f_2)_x(x,y) = 2y$ y $(f_2)_y = 2x$. Esto basta para garantizar que la derivada de f existe y es el mapa lineal de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por la matriz

$$df_{(a,b)} = \begin{pmatrix} (f_1)_x(a,b) & (f_1)_y(a,b) \\ (f_2)_x(a,b) & (f_2)_y(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & -2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix} .$$

Problema 14:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con

$$(df_{(x,y)})(a,b) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b = (\nabla f)(x,y) \cdot (a,b) .$$

Se tiene $(\nabla f)(x,y) = (2x, 2y)$ de modo que $df_{(1,1)}(a,b) = 2(a+b)$.

b) $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $df_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, con

$$(df_t)(s) = s((f_1)'(t), (f_2)'(t)) = s(\cos(t), -\sin(t)) .$$

$df_{\pi/4}(s) = s(1,-1)/\sqrt{2}$.

c) $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $df_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, con

$$df_{(u,v)}(a,b) = \begin{pmatrix} (f_1)_u(u,v) & (f_1)_v(u,v) \\ (f_2)_u(u,v) & (f_2)_v(u,v) \\ (f_3)_u(u,v) & (f_3)_v(u,v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(v) & -u\sin(v) \\ \sin(v) & u\cos(v) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a\cos(v) - bu\sin(v) \\ a\sin(v) + bu\cos(v) \\ b \end{pmatrix} .$$

Luego,

$$df_{(1,\pi)}(a,b) = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ b \end{pmatrix} .$$

Problema 16: Considere la función $G : \mathbb{R} \to S$ dada por $G := F \circ \gamma$. Entonces, con $\boldsymbol{r} = (a,b,c)$ y $\boldsymbol{p} = (x,y,z)$

$$dF_{\boldsymbol{p}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ , \ \ dF_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = (\nabla F)(\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{r} = F_x(x,y,z)a + F_y(x,y,z)b + F_z(x,y,z)c \ ;$$

$$d\gamma_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \ , \ \ d\gamma_t(s) = s(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \gamma_3'(t)) = s\boldsymbol{\gamma}'(t) \ ;$$

y $dG_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $dG_t = (dF_{\boldsymbol{\gamma}(t)}) \circ (d\gamma_t)$,

$$dG_t(s) = (dF_{\boldsymbol{\gamma}(t)})[s\boldsymbol{\gamma}'(t)] = (\nabla F)(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot (s\boldsymbol{\gamma}'(t)) = s(\nabla F)(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t) \ ,$$

o sea $G'(t) = (\nabla F)(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t)$. Pero $G \equiv 0$ de modo que $G'(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ así que $0 = (\nabla F)(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Problema 17: a) Si f es continuamente diferenciable, sus derivadas parciales existen y son continuas. Claramente, $\nabla F = (-f_x, -f_y, 1)$. El plano tangente a S en el punto $\boldsymbol{p} = (x, y, f(x, y)) \in S$ es

$$T = \{\boldsymbol{p} + t\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x} + s\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y} \;:\; s, t \in \mathbb{R}\} \;.$$

Ahora,

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x,y) \end{pmatrix} \;, \quad \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} \;;$$

y ambos vectores son ortogonales a $(\nabla F)(\boldsymbol{p})$ de modo que este último es una normal (no normalizada) a T. La ec. del plano tangente en $\boldsymbol{p} + (p_1, p_2, f(p_1, p_2)$ es entonces también

$$(\nabla F)(\boldsymbol{p}) \cdot ((x, y, z) - (p_1, p_2, f(p_1, p_2)) = 0 \;.$$

O sea:

$$z - f_x(p_1, p_2)(x - p_1) - f_y(p_1, p_2)(y - p_2) = f(p_1, p_2) \;.$$

Problema 19: Este problema está mal planteado y supera las posibilidades de los alumnos a esta altura del curso. La respuesta es: no hay ninguna dirección hacia adentro de la bola que maximice el crecimiento en ese punto.

Problema 20: Derive nomas.

Problema 21: Observamos que $f(0, y) = f(x, 0) = 0$. Luego

$$f_x(0, y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t, y) - f(0, y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2y(t^2 - y^2)}{t^2 + y^2} = -2y \;;$$

y, similarmente[2],

$$f_y(x, 0) = 2x \;.$$

También,

$$f_x(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0 \;, \quad f_y(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0 \;.^3$$

Entonces,

$$f_{xy}(0, 0) = (f_x)_y(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_x(0, t) - f_x(0, 0)}{t} = -2 \;;$$

$$f_{yx}(0, 0) = (f_y)_x(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_y(t, 0) - f_x(0, 0)}{t} = 2 \;.$$

Problema 22: Las curvas $y = \pm x^3$ pasan por el origen y, para $x \neq 0$, se tiene $f(x, \pm x) = \pm 1/2$. f es discontinua en el origen.

$$f_{\boldsymbol{u}}(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\boldsymbol{u}) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 u_1^3 u_2}{t^4 u_1^6 + u_2^2} = 0 \;,$$

[2]Si no quiere calcular observe que $f(x, y) = -f(y, x)$.

[3]Observe que las derivadas parciales son continuas en $(0, 0)$.

cualesquiera sean u_1, u_2 con $u_1^2 + u_2^2 = 1$.

Problema 23: Las derivadas parciales son $h_x(x, y) = -4xe^{-x^2}$, $h_y(x, y) = -9y^2 e^{-3y^3}$. La derivada direccional en dirección $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ con $u_1^2 + u_2^2 = 1$ es:

$$h_{\boldsymbol{u}} = u_1 h_x + u_2 h_y \ ;$$

de modo que

$$h_{\boldsymbol{u}}(1, 0) = u_1 h_x(1, 0) + u_2 h_y(1, 0) = -4u_1/e \ .$$

Ya que $|h_{\boldsymbol{u}}(1, 0)| = 4|u_1|/e \leq 4/e$, el valor maximal de $h_{\boldsymbol{u}}(1, 0)$ se obtiene en la dirección $(-1, 0)$. Esta es la dirección buscada.