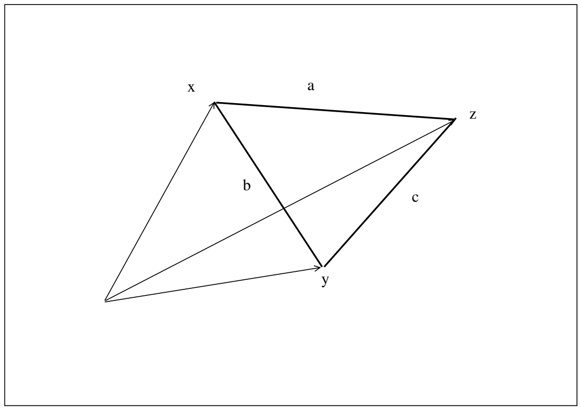

Figura 1: Triángulo de vértices $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ y lados $a = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\|$, $b = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ y $c = \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}\|$.

Sobre los problemas 4 y 5 del práctico 1[1]

Consideramos vectores (puntos) $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$ con la suma usual (componente por componente) y la multiplicación por reales usual (se multiplican las componentes):

$$\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y} = (x_1 + \alpha y_1, x_2 + \alpha y_2, \cdots, x_n + \alpha y_n) \ , \ \ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \ , \ \ \alpha \in \mathbb{R} \ .$$

Con esta estructura $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial real que proveemos con el producto escalar o interno (espacio euclideo n-dimensional)

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \ , \ \ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \ . \tag{1}$$

El mapa $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$ es lineal en cada una de las dos componentes. Se define una norma (i.e., largo)

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \ ; \tag{2}$$

que satisface $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = \mid \alpha \mid \ \|\boldsymbol{x}\|$ y la **desigualdad del triángulo**[2]

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\| \ . \tag{3}$$

El nombre de esta desigualdad fundamental (y característica para un "largo") proviene del hecho que es equivalente (demuestrelo) a

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}\| \ , \tag{4}$$

al considerar la figura 1 (en un triángulo la suma de cualquier par de lados es mayor o igual al lado restante).

Dado un punto $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ y un real positivo r consideramos

[1] G. A. Raggio; FaMAF-UNC.
[2] Que demostramos al final.

1. La bola abierta de radio r centrada en $\boldsymbol{p}$:

$$B_r(\boldsymbol{p}) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < r\} \ .$$

2. La bola cerrada de radio r centrada en $\boldsymbol{p}$:

$$\overline{B}_r(\boldsymbol{p}) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| \leq r\} \ .$$

3. La esfera de radio r centrada en $\boldsymbol{p}$:

$$S_r(\boldsymbol{p}) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| = r\} \ .$$

Lema 1 *Si $\|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{x}\| < r$ y $\epsilon \in \mathbb{R}$ satisface $0 < \epsilon \leq r - \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|$ entonces, con $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$,*

$$\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| < \epsilon \implies \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{p}\| < r \ .$$

En otras palabras $B_\epsilon(\boldsymbol{x}) \subset B_r(\boldsymbol{p})$.

Demostración: $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{p}\| \leq \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < \epsilon + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| \leq (r - \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|) + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| = r$.

Como consecuencia, vemos que lo que llamamos "bola abierta de radio ..." $B_r(\boldsymbol{p})$ es en efecto abierta ya que todos sus puntos son interiores.

Lema 2 *Sea $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| = r > 0$ y $\boldsymbol{x}_t := (1-t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{x}$ con $t \in \mathbb{R}$. Entonces para todo $\epsilon > 0$ se tiene que*

1. $\|\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}\| < \epsilon$ *y* $\|\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{p}\| > r$ *si* $1 < t < 1 + \epsilon/r$;
2. $\|\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}\| < \epsilon$ *y* $\|\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{p}\| < r$ *si* $\max\{1 - \epsilon/r, 0\} < t < 1$.

En otras palabras, todo entorno de un punto en $S_r(\boldsymbol{p})$ contiene infinitos puntos en $B_r(\boldsymbol{p})$ y infinitos puntos que no están en $B_r(\boldsymbol{p})$.

Demostración:

$$\|\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}\| = \|(1-t)(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{x})\| =| 1 - t | \ r \ ; \quad \|\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{p}\| = \|t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| =| t | \ r \ .$$

Si $t > 1$ entonces $\|\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{p}\| > r$ y, cuando también $t < 1 + \epsilon/r$, $\|\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}\| = |1 - t| \, r = (t-1)r < (1 + (\epsilon/r) - 1)r = \epsilon$.
Si $0 < t < 1$ entonces $\|\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{p}\| < r$ y, cuando también $t > 1 - \epsilon/r$, $\|\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}\| = |1 - t| \, r = (1-t)r < (1 - 1 + \epsilon/r)r = \epsilon$.

Como consecuencia $S_r(\boldsymbol{p})$ es la frontera tanto de $B_r(\boldsymbol{p})$ como de $\overline{B}_r(\boldsymbol{p})$ y es un conjunto de puntos de acumulación de estas bolas. La bola $\overline{B}_r(\boldsymbol{p})$ es, efectivamente, cerrada.

Desigualdades del triángulo y de Cauchy-Schwarz.

Supongamos que es válida la desigualdad del triángulo (3); entonces

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^n x_j^2 + \sum_{j=1}^n y_j^2 + 2\sum_{j=1}^n x_j y_j = \sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^2$$

$$= \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 \overset{(3)}{\leq} (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|$$

de modo que $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \leq \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}$. Reemplazando $\boldsymbol{y}$ por $-\boldsymbol{y}$ obtenemos $-\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \leq \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}$ y, por lo tanto

$$| \ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \ | \leq \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\| \ , \tag{5}$$

que es la famosa **desigualdad de Cauchy-Schwarz**. Es inmediato que si suponemos la validez de la desigualdad (5) obtenemos la desiguladad del triángulo:

$$(\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\| \overset{(5)}{\geq} \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 \ .$$

¡Ambas desigualdades son equivalentes! Podemos entonces proceder a demostrar (5) lo que resulta bastante simple. Si $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ entonces la desigualdad es evidente. Supongamos que $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ y consideremos el vector que se obtiene restandole a $\boldsymbol{y}$ su proyección sobre el subespacio unidimensional asociado con $\boldsymbol{x}$; este vector es

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} - \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\,\boldsymbol{x} \ .$$

Y, como todo vector, cumple con $\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{z} \geq 0$ de modo que

$$0 \leq \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} - 2\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x} + \left(\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\right)^2 \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$$

$$= \|\boldsymbol{y}\|^2 - 2\frac{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2} + \left(\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\right)^2 \|\boldsymbol{x}\|^2 = \frac{\|\boldsymbol{x}\|^2\,\|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$$

y, por lo tanto $\|\boldsymbol{x}\|^2\,\|\boldsymbol{y}\|^2 \geq (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2$ de donde se desprende la desigualdad de Cauchy-Schwarz tomando raices cuadradas. No sólo eso; si acaso $\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\| =\mid \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \mid$, entonces deducimos que $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ de modo que

$$\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\,\boldsymbol{x} \ .$$

Inversamente, si $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$ para algún α real, entonces

$$|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}| = |\alpha|\,\|\boldsymbol{x}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\| \ ,$$

lo que nos permite (reconsiderando el caso $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ donde $\boldsymbol{x}$ depende trivialmente linealmente de $\boldsymbol{y}$) suplmentar que **hay igualdad en la desigualdad de Cauchy Schwarz si y sólo si $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son linealmente dependientes**.[3]

[3] La demostración dada para la equivalencia de las desiguladades y para la válidez de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, no usa para nada que estamos trabajando con vectores en $\mathbb{R}^n$ y se traslada con pequeñas adaptaciones al caso de un espacio vectorial complejo $\mathcal{V}$ con un producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ que satisface

1. $\langle\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\rangle = \alpha\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle + \langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle$;
2. $\overline{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle} = \langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle$;
3. $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle \geq 0$ con igualdad si y sólo si $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.