Parcial 1[1]

1.

a) Con $\boldsymbol{v} = (x, y)$, $h(\boldsymbol{v}) = \sqrt{4- \parallel \boldsymbol{v} \parallel^2}$. La raíz cuadrada está definida si el radicando es no-negativo; por lo tanto, el domino de h es el disco cerrado de radio 2 centrado en $\mathbf{0}$: $\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 : \parallel \boldsymbol{v} \parallel \leq 2\}$. La imagen de este disco bajo h es el intervalo $[0, 2]$. Las curvas de nivel son los círculos de radio r con $0 \leq r \leq 2$ y en cada uno de ellos h toma el valor $\sqrt{4-r^2}$. Se trata de un hemisferio (superior apoyado sobre el plano x, y) de radio 2; como una taza invertida que se apoya en el plano (x, y) en el círculo de radio 2.

b) $P = \{s \underbrace{(1, 0, 1)}_{=\boldsymbol{a}} + t \underbrace{(-1, 1, 0)}_{=\boldsymbol{b}} + \underbrace{(0, 0, 2)}_{=\boldsymbol{x}_o} : \ s, t \in \mathbb{R}\}$. El producto vectorial

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (1, 1, -1)$$

es ortogonal (perpendicular) a $\boldsymbol{a}$ y a $\boldsymbol{b}$ y por ende a $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o$ para todo $\boldsymbol{x} \in P$. La ecuación normal de P es entonces

$$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \ (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o) \cdot \boldsymbol{N} = 0\}.$$

Equivalentemente $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y - z + 2 = 0\}$.

2.

a) Con $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, se tiene $\lim(x, y) = (1, 0)$ si y sólo si $\lim \rho = 0$. Pero,

$$\mid x - 1 \mid \leq \rho \ , \quad \mid y \mid \leq \rho \ .$$

Con lo cual

$$\left| \frac{2(x-1)^2 y}{(x-1)^2 + y^2} \right| = 2 \frac{\mid x - 1 \mid^2 \mid y \mid}{\rho^2} \leq 2 \frac{\rho^2 \, \rho}{\rho^2} = 2\rho \ ,$$

de donde se desprende que el límite buscado es 0.

b) En las curvas $\gamma_c = \{(cy^3, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \in \mathbb{R}\}$ donde c es constante real arbitraria tenemos

$$\frac{xy^3}{x^2 + y^6} = \frac{c}{1 + c^2} \ , \quad y \neq 0 \ ,$$

de modo que estas curvas γ_c son curvas de nivel. Todas ellas pasan por $(0, 0)$ y entregan a $c/(1 + c^2)$ como valor en $(0, 0)$. El límite buscado no existe.

[1] G. A. Raggio; FaMAF-UNC.

3.

a) Si $\varphi(s) := \int_a^s g(t)\,dt$, donde a es constante, entonces (Teorema Fundamental del cálculo) $\varphi'(s) = g(s)$. Definiendo $s(x,y) := xy$, y $F(x,y) = \varphi(s(x,y))$ obtenemos, con la regla de la cadena,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \varphi'(s(x,y))\,\frac{\partial s}{\partial x}(x,y) = g(s(x,y))y = yg(xy) \ ,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \varphi'(s(x,y))\,\frac{\partial s}{\partial y}(x,y) = g(s(x,y))x = xg(xy) \ .$$

b) El cálculo es directo

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -yz\sin(xy)\cos(\cos(xy)z) \ , \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -xz\sin(xy)\cos(\cos(xy)z) \ ,$$
$$\frac{\partial h}{\partial z} = \cos(xy)\cos(\cos(xy)z) \ .$$

4.

a) Fuera del origen g es cociente de dos funciones continuas y el denominador no se anula; por lo tanto g es continua fuera del origen. Tomando las rectas $\gamma_c = \{(x,cx) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ donde c es constante real arbitraria tenemos

$$g(x,cx) = \frac{c}{1+c^2};\ ,\ , \quad x \neq 0 \ .$$

Esto muestra que las rectas son curvas de nivel y como todas pasan por $(0,0)$ el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ no existe de modo que g es discontinua en el origen.

b) Las derivadas parciales fuera del origen son

$$(\partial g/\partial x)(x,y) = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \ , \quad (\partial g/\partial y)(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \ .$$

Ya que $g(x,0) = g(0,y) = 0$, en el origen tenemos

$$(\partial g/\partial x)(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x,0)-g(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0 \ ,$$

y, análogamente $(\partial g/\partial y)(0,0) = 0$. Observe que

$$(\partial g/\partial x)(0,y) = \frac{1}{y} \ , \quad (\partial g/\partial y)(0,y) = 0 \ , \quad y \neq 0 \ ;$$

$$(\partial g/\partial x)(x,0) = 0 \ , \quad (\partial g/\partial y)(x,0) = \frac{1}{x} \ , \quad x \neq 0 \ ;$$

y las derivadas parciales son discontinuas en el origen.