Parcial 2[1]

1. Sea

$$h(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & , \quad \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & , \quad \text{si } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases} .$$

(a) Probar que h es continua en todo $\mathbb{R}^3$.
(b) Calcular h_x, h_y, h_z en todo punto de $\mathbb{R}^3$.
(c) ¿ Es h diferenciable en $(0,0,0)$?
(a) h es continua fuera del origen como cociente de funciones continuas (cuyo denominador no se anula). Ya que fuera del origen

$$\left| \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right| = \frac{|x|\,|y|\,|z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leq \frac{\|\boldsymbol{r}\|^3}{\|\boldsymbol{r}\|} = \|\boldsymbol{r}\|^2 ,$$

donde $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$, h es también continua en el origen.
(b) Con $\boldsymbol{r}$ como en (a) y $r = \|\boldsymbol{r}\|$, cuyo gradiente es $(\nabla r)(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{r}/r^2$,

$$(\nabla h)(\boldsymbol{r}) = xyz\frac{\boldsymbol{r}}{r^2} + \frac{1}{r}(yz, xz, xy) , \quad r \neq 0 .$$

Ya que $h(x,0,0) = h(0,y,0) = h(0,0,z) = 0$, las derivadas parciales en el origen son:

$$h_x(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{h(t,0,0) - h(0,0,0)}{t} = 0 ;$$

y, análogamente (por la invarianza de h ante permutación de variables), $h_y(\mathbf{0}) = h_z(\mathbf{0}) = 0$. Observamos que h_x es continua en $\mathbb{R}^3$ ya que

$$|h_x(\boldsymbol{r})| = \left| \frac{-x^2yz}{r^2} + \frac{yz}{r} \right| \leq \left| \frac{r^4}{r^2} \right| + \left| \frac{r^2}{r} \right| = r^2 + r ,$$

e igual para h_y y h_x, de modo que $\lim_{\boldsymbol{r}\to\mathbf{0}} (\nabla h)(\boldsymbol{r}) = \mathbf{0}$.
(c) Por la continuidad de ∇h en $\mathbb{R}^3$ deducimos que h es diferenciable en $\mathbb{R}^3$. Pero esto puede verificarse directamente en el origen

$$\left| \frac{h(\boldsymbol{t})}{\|\boldsymbol{t}\|} \right| = \frac{|t_1|\,|t_2|\,|t_3|}{\|\boldsymbol{t}\|^2} \leq \frac{\|\boldsymbol{t}\|^3}{\|\boldsymbol{t}\|^2} = \|\boldsymbol{t}\| .$$

2. Hagalo Usted mismo.

3. Sea $f(x,y) = x^3 - xy^2 + 1$.
(a) Considere la superficie $S \subset R^3$ dada por el gráfico de f. Hallar una representación explícita para el plano tangente a S en el punto $\boldsymbol{p} = (1,0,2)$.
(b) Calcule el polinomio de Taylor de segundo grado de f en el punto $(1,0)$.

[1]G. A. Raggio; FaMAF-UNC.

(c) Sea $G(u,v) = f(g(u,v),v)$, con $g(u,v) = u+v$. Calcule G_u y G_v.
(a) f es continuamente diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Una normal a S en $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, f(p_1,p_2))$ es

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} -f_x(p_1,p_2) \\ -f_y(p_1,p_2) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(3p_1^2 - p_2^2) \\ -2p_1p_2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

La ec. del plano tangente en $\boldsymbol{p}$ es:

$$0 = \boldsymbol{N} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}) = -(3p_1^2 - p_2^2)(x - p_1) - 2p_1p_2(y - p_2) + z - f(p_1,p_2) .$$

Ponga los números Usted mismo.
(b) Necesitamos el gradiente que ya calculamos,

$$(\nabla f)(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - y^2) \\ -2xy \end{pmatrix} ;$$

y el Hessiano

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -2y) \\ -2y & -2x \end{pmatrix} .$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x,y) &= f(1,0) + (\nabla f)(1,0)\cdot(x,y) + \frac{1}{2}\left\{f_{xx}(1,0)x^2 + 2f_{xy}(1,0)xy + f_{yy}(1,0)y^2\right\} \\ &= 2 + 3x + 3x^2 - y^2 . \end{aligned}$$

Observe que

$$f(1+x,y) - f^{(2)}(x,y) = x^3 - xy^2 ,$$

y $|f(1+x,y) - f^{(2)}(x,y)| \leq 2\|(x,y)\|^3$.
(c) Directamente substituyendo

$$G(u,v) = f(u+v,v) = 1 + (u+v)^3 - (u+v)v^2 = 1 + u^3 + 3u^2v + 2uv^2 .$$

Por ende,

$$G_u(u,v) = 3u^2 + 6uv + 2v^2 , \quad G_v(u,v) = 3u^2 + 4uv .$$

plicando la regla de la cadena. Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(u,v) = (g(u,v),v)$; entonces $dh_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con

$$dh_{(u,v)}(a,b) = \begin{pmatrix} g_u(u,v) & g_v(u,v) \\ (\partial v/\partial u) & (\partial v/\partial v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b \end{pmatrix} .$$

Ahora $G = f \circ h$ y $dG_{(u,v)} = df_{(g(u,v),v)} \circ (dh_{(u,v)}$, con

$$dG_{(u,v)} = df_{(g(u,v),v)} \circ dh_{(u,v)} = (\nabla f)(g(u,v),v)) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (3g(u,v)^2 - v^2, 3g(u,v)^2 - v^2 - 2g(u,v)v) = (3u^2 + 6uv + 2v^2, 3u^2 + 4uv) \ .$$

4. Sea $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$.
(a) Verifique que $(0,0)$ es un punto crítico y calcule la matriz Hessiana de f en $(0,0)$.
(b) ¿Puede ser $(0,0)$ un mínimo o un máximo local de f ? Ayuda: considere las tres regiones del plano delimitadas por las gráficas de las parbolas $y = x^2$ e $y = 2x^2$ y estudie el signo de f en cada una de estas regiones.

(a) $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - 3x^2y$; $f_x(x,y) = 8x^3 - 6yx$, $f_y(x,y) = 2y - 3x^2$, $f_{xx}(x,y) = 24x^2 - 6y$, $f_{xy}(x,y) = -6x$, $f_{yy}(x,y) = 2$. Efectivamente, $\mathbf{0} = (0,0)$ es crítico. Además

$$H(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} ,$$

cuya determinante se anula. No podemos decir nada por ahora sobre $\mathbf{0}$ como punto crítico.
(b) Las regiones

$$R_1 := \{(x,y) : \ y > 2x^2 \ , \ x \in \mathbb{R}\} \ , \quad R_2 := \{(x,y) : \ x^2 < y < 2x^2 \ , \ x \in \mathbb{R}\} \ ,$$

$$R_3 := \{(x,y) : \ y < x^2 \ , \ x \in \mathbb{R}\}$$

son abiertas y están bordeadas por las parábolas $y = x^2$ y $y = 2x^2$. Las tres regiones tienen a $\mathbf{0}$ como punto límite común.
En R_1, $y - 2x^2 > 0$ implica que $y - x^2 > 0$ de modo que f es positiva (> 0) allí. En R_2, $y - x^2 > 0$ y $y - 2x^2 < 0$ de modo que f es negativa (< 0) en R_2 y, por último aunque ya no nos hace falta, en R_3 se tiene $y - x^2 < 0$ implica $y - 2x^2 < 0$ y por ende f es positiva en R_3. Como $f(\mathbf{0}) = 0$, $\mathbf{0}$ no es un punto extremal local: Cualquier entorno de $\mathbf{0}$ intersecta a las tres regiones y, por ende, f adopta valores negativos y positivos en él.
Hay, por supuesto, otras variantes para ver que $\mathbf{0}$ no es extremal. Por ejemplo, analizar parábolas $y = cx^2$ con distintos valores de c, etc. etc.
También es cierto que $\mathbf{0}$ es el único pto. crítico de f.