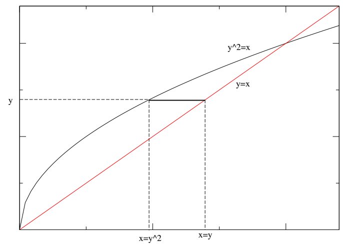

Figure 1: La región del 1(a)

Análisis Matemático III. Parcial 3 (15/6/2018)

1. (a) Calcular la integral $\int_0^1 \int_{y^2}^{y} (2x+y)dxdy$, y dibujar la región plana acotada B sobre la que se esta integrando.

$B = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1 \ , \ y^2 \leq x \leq y\}$ o, también, $B = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \ , \ x \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{y} (2x+y)\, dx\, dy = \int_0^1 (2(x^2/2) + yx) \,|_{x=y^2}^{x=y} \ dy = \int_0^1 (2y^2 - y^4 - y^3)\, dy$$

$$= 2\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = \frac{13}{60} \ .$$

(b) Calcular el volumen bajo el gráfico de $f(x,y) = e^{-x-y}$ sobre la región plana triangular de vertices $(0,2)$, $(2,0)$ y $(2,4)$.

El triángulo está delimitado por las tres rectas $y_1(x) = x+2$, $y_2(x) = 2-x$ y $x = 2$.

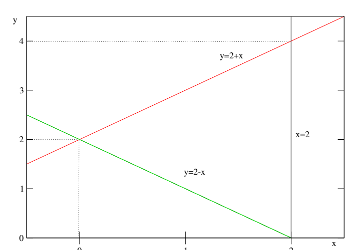

Figure 2: La región del 1(b)

Luego, el volumén buscado es

$$V = \int_0^2 \left(\int_{y_2(x)}^{y_1(x)} e^{-(x+y)}\, dy \right) dx = \int_0^2 e^{-x} \left(\int_{y_2(x)}^{y_1(x)} e^{-y}\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 e^{-x} \left(e^{-y_2(x)} - e^{-y_1(x)} \right) dx = \int_0^2 \left(e^{-2} - e^{-2x-2} \right) dx = e^{-2} \left(2 + \frac{1}{2} \left[e^{-4} - 1 \right] \right)$$

$$= \frac{e^{-2}}{2} \left(3 + e^{-4} \right) \ .$$

2. (a) Enunciar el Teorema del cambio de variables para integrales.

(b) Calcular la integral

$$\iint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dxdydz,$$

donde $B = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\} \subset R^3$ es la bola cerrada de radio 1.

$$\int_B\int e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dxdydz = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{r^3} r^2 \operatorname{sen}(\phi)\,d\phi\,d\theta\,dr$$

$$= 2\pi\int_0^1 e^{r^3} r^2 \left(\int_0^{\pi} (-1)\cos'(\phi)\,d\phi\right) dr = \frac{4\pi}{3}\int_0^1 (e^{r^3})'\,dr = \frac{4\pi(e-1)}{3}\ .$$

3. (a) Enunciar el Teorema de la Función Inversa y el Teorema de la Función Implícita.

(b) Considerar el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x = 2s + t^2, \\ y = s^2 - t^2. \end{cases}$$

Calcular $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial y}$, $\frac{\partial s}{\partial y}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$ en el punto $(3,0)$ que es imagen del punto $(s,t) = (1,-1)$.

Con $f(s,t) = (x(s,t) := 2s + t, y(s,t) := s^2 - t^2)$, la derivada es

$$df_{(s,t)} = \begin{pmatrix} 2 & 2t \\ 2s & -2t \end{pmatrix}\ ,$$

y es continua. La determinante es $-4t(s+1)$ y no se anula en $\boldsymbol{p} = (1,-1)$ de modo que por el T. de la Función Inversa hay un entorno U de $f(\boldsymbol{p}) = (3,0)$, un entorno V de $\boldsymbol{p}$ y una función $g : U \to V$ con $f(g(\boldsymbol{q})) = \boldsymbol{q}$ para todo $\boldsymbol{q} \in U$. Además g es continuamente diferenciable con derivada

$$dg_{\boldsymbol{q}} = \left(df_{g(\boldsymbol{q})}\right)^{-1}\ .$$

Ahora,

$$\begin{pmatrix} (\partial s/\partial x)(3,0) & (\partial s/\partial y)(3,0) \\ (\partial t/\partial x)(3,0) & (\partial t/\partial y)(3,0) \end{pmatrix} = dg_{(3,0)} = \left(df_{(1,-1)}\right)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

(c) Sea $U(x,y,z) = 5xy - 4x^3 - e^z$. Probar que $U(x,y,z) = 0$ define una función implícita $z = f(x,y)$ en un entorno del punto $(1,1)$ tal que $f(1,1) = 0$. Calcular $f_x(1,1)$, $f_y(1,1)$.

$U(1,1,0) = 0$ y $grad(U)(x,y,z) = (5y - 12x^2, 5x, -e^z)$ es continuo con $-e^z \neq 0$. Se satisfacen las hipótesis del T. de la Función Implicita. Hay entonces un entorno U de $(1,1)$ en $\mathbb{R}^2$ y una función $f : U \to \mathbb{R}$ que es continuamente diferenciable, $f(1,1) = 0$, y $U(x,y,f(x,y)) = 0$ para todo $(x,y) \in U$. Se tiene

$$df_{(x,y)} = \frac{-1}{(\partial U/\partial z)(x,y,f(x,y))}\left[(\partial U/\partial x)(x,y,f(x,y)), (\partial U/\partial y)(x,y,f(x,y))\right].$$

Por lo tanto

$$f_x(1,1) = -(5-12) = 7\ ,\quad f_y(1,1) = -5\ .$$

4. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando correctamente su respuesta.

   (a) El punto de la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 - z = 1\}$ mas cercano al origen es $(0, 0, -1)$.

   Primera versión: El punto $(0, 1/2, -3/4)$ pertencec a S y su distancia al origen es $\sqrt{13/16} < 1$. La distancia del origen a $(0, 0, -1)$ es 1. $\rightarrow$ Falso.

   Segunda versión: Inspección del gráfico y uso del Teorema de Pitagoras (la hipotenusa es mayor que cualquier cateto) muestra que la menor distancia buscada está en el plano yz. Ahora

$$\|(0, y, y^2 - 1)\|^2 = y^4 - y^2 + 1 = \left(y^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}\,,$$

   con igualdad si y sólo si $y^2 = 1/2$ o sea $y = \pm 1/\sqrt{2}$. Hay dos minimizadores $(0, \pm 1/\sqrt{2}, -1/2)$. *Variante*:: $\varphi(y) = \|(0, y, y^2 - 1)\|^2 = y^4 - y^2 + 1$ es par; $\varphi'(y) = 4y(y^2 - (1/2))$; hay dos puntos críticos $y = \pm 1\sqrt{2}$ y, ya que $\varphi''(\pm 1\sqrt{2})) = 12(1/2) - 2 = 4 > 0$, son mínimos del mismo valor asi que son absolutos.

   (b) La función $f(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$ tiene una inversa local continuamente diferenciable cerca de $(0, 0)$.

   Tenemos

$$df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 3(x^2 - y^2) & -6xy \\ 6xy & 3(x^2 - y)^2 \end{pmatrix} \qquad df_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Supongase que la inversa g está definida en un entorno del origen y es diferenciable. Entonces, por la regla de la cadena, tenemos

$$(x, y) = (g \circ f)(x, y) \implies E = d(g \circ f)_{(x,y)} = (dg_{f(x,y)}) \circ (df_{(x,y)})\,;$$

   lo que es imposible para $(x, y) = (0, 0)$. $\rightarrow$ Falso.

   (c) Uno de los extremos absolutos de la función $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ sobre el disco cerrado $\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ está en el disco abierto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

   Observe que $f(x, y) = (x + y/2)^2 + 3y^2/4 \geq 0$ con igualdad si y sólo si $x + y/2 = y = 0$ o sea $x = y = 0$. $(0, 0)$ es entonces un mínimo absoluto y está en D. $\rightarrow$ Verdadero. *Variante*:: $grad(f) = (2x + y, 2y + x) = (0, 0)$ si y sólo si $x = y = 0$ de modo que $(0, 0)$ es el único punto crítico y, ya que el Hessiano

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   es positivo definido, $(0, 0)$ es un mínimo que es absoluto en virtud de su unicidad.