Simetrías I

G.A. Raggio[1]

Desde un punto de vista formal y –por cierto– bastante limitado, la electrodinámica clásica es el estudio de pares de campos vectoriales $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ cuya evolución dinámica está especificada por las ecuaciones de Maxwell. Estos campos son campos vectoriales tridimensionales que están definidos en el espacio-tiempo $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^4$ de dimensión 4 o bien en subconjuntos de este espacio. El estudio de transformaciones de coordenadas del espacio-tiempo y el comportamiento de los campos vectoriales ante estas transformaciones es importante. No sólo por razones fundamentales (transformaciones de Galileo, de Lorentz, rotaciones espaciales, inversión temporal, etc.) sino también como herramienta para encarar –por ejemplo– la solución del problema de Cauchy para las ecuaciones de Maxwell. Entre estas transformaciones hay aquellas particulares que operan solamente sobre la parte espacial del espacio-tiempo $(\boldsymbol{r}, t) \mapsto (\boldsymbol{r}', t)$; estas son las que consideramos a continuación. Como la parte temporal es invariante, pensamos –fijando t– que los campos vectoriales están definidos en $\mathbb{R}^3$ (o subconjuntos de esto).

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación invertible; la inversa será T^{-1}. Podemos considerar a

$$\boldsymbol{r}' = T\boldsymbol{r} \tag{1}$$

como una transformación de variables. Si ahora $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,(\text{ o } \mathbb{C})$ es un campo escalar entonces este campo se expresa en términos de las nuevas variables $\boldsymbol{r}'$ como

$$f'(\boldsymbol{r}') = f(\boldsymbol{r}) \; ;$$

este es el punto de vista llamado *pasivo* donde (1) es un cambio de coordenadas. Esta relación es equivalente (ponga $\boldsymbol{r} = T^{-1}\boldsymbol{x}$) a

$$f'(\boldsymbol{x}) = f(T^{-1}\boldsymbol{x}) \iff f' = f \circ T^{-1} \; , \tag{2}$$

que codifica la interpretación activa de la transformación. La figura 1 ejemplifica esto en el caso particular donde T es (i) una rotación, (ii) una reflexión y (iii) una inversión. En todos estos casos T es **lineal** lo que simplifica mucho la discusión.
Consideremos ahora un campo vectorial $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. En la figura 2 se repite la figura 1 para el caso de un campo vectorial. En el punto de vista activo, para calcular el campo en el punto $\boldsymbol{x}$ debo primero determinar $\boldsymbol{y} = T^{-1}\boldsymbol{x}$ (el punto que transformado me de $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{x}$; luego evaluar el campo dado en $\boldsymbol{y}$ y a este vector transformarlo $T\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})$. O sea

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}) = T\boldsymbol{F}(T^{-1}\boldsymbol{x}) \iff \boldsymbol{F}' = T(\boldsymbol{F} \circ T^{-1}) \; . \tag{3}$$

Diremos que un campo escalar f (resp. vectorial $\boldsymbol{F}$) es T-invariante si $f' = f$ (resp. $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F}$). La pregunta es ahora ¿como se comportan las tres operaciones básicas de derivación (de primer orden) "div", "∇" y "rot" ante una transformación? Para encarar esta pregunta es necesario calcular la derivada genérica $(\partial(f \circ T^{-1})/\partial x_\alpha)$ que, por la regla de la cadena, está dada por

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(f \circ T^{-1}) = \left(\frac{\partial (T^{-1}\boldsymbol{x})_\beta}{x_\alpha} \right) \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y_\beta} \right) \circ T^{-1} \right] \quad .$$

[1]–para Electromagnetismo II, Agosto 2017

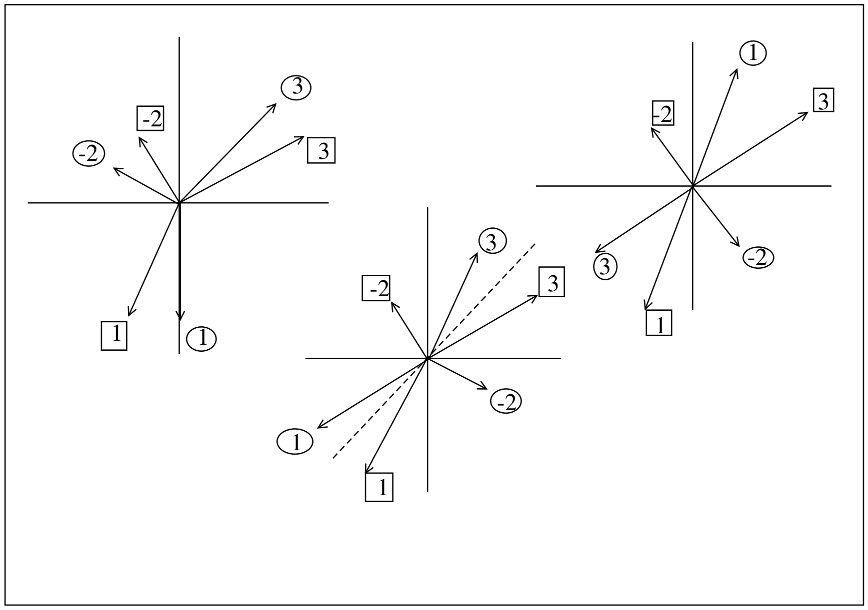


Figura 1: Rotación (izquierda), reflexión (centro) y inversión (derecha) de un campo escalar. Proyección en un plano que pasa por el origen.

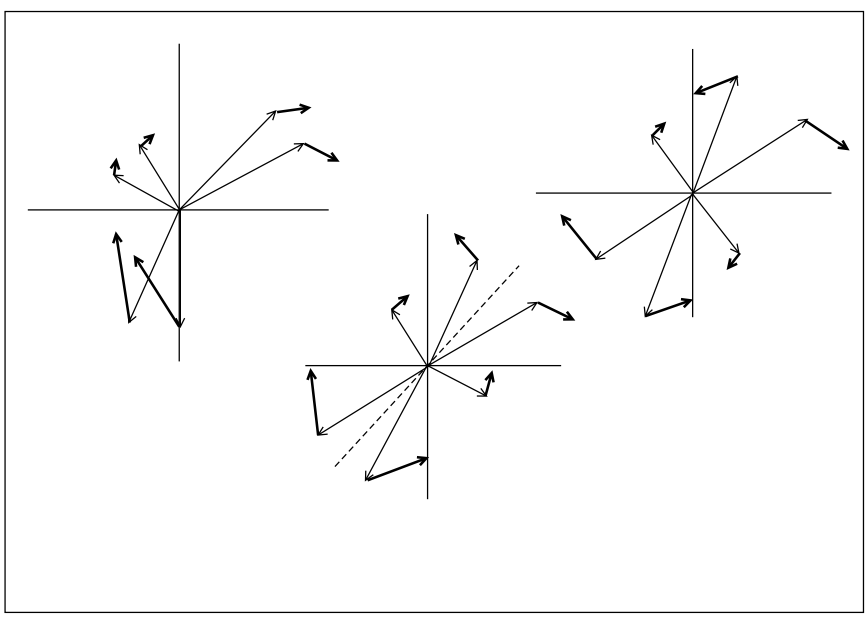


Figura 2: Rotación (izquierda), reflexión (centro) y inversión (derecha) de un campo vectorial. Proyección en un plano que pasa por el origen.

Si suponemos a esta altura del partido que la transformación T es **lineal** –suposición que adopto de ahora en más– entonces T^{-1} también es lineal y podemos escribir

$$(T^{-1}\boldsymbol{x})_\beta = (T^{-1})_{\beta,\alpha} x_\alpha$$

donde los elementos matriciales están definidos por

$$(T^{-1})_{\alpha,\beta} = \hat{\boldsymbol{e}_\alpha} \cdot (T^{-1}\hat{\boldsymbol{e}_\beta}) \ .$$

Por lo tanto, en el caso lineal,

$$\left(\frac{\partial (T^{-1}\boldsymbol{x})_\beta}{\partial x_\alpha}\right) = (T^{-1})_{\beta,\alpha}$$

de modo que, en este caso,

$$\frac{\partial}{x_\alpha}(f \circ T^{-1}) = (T^{-1})_{\beta,\alpha}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y_\beta}\right) \circ T^{-1}\right] = ((T^t)^{-1})_{\alpha,\beta}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y_\beta}\right) \circ T^{-1}\right] \ ,$$

donde A^t para la matriz A denota a la matriz transpuesta[2]. Esto nos da la ley de transformación del gradiente

$$\nabla(f \circ T^{-1}) = \left[(T^t)^{-1}\nabla f\right] \circ T^{-1} \ . \tag{4}$$

¿Que quiere decir que la ecuación

$$\nabla f = \boldsymbol{F} \ , \tag{5}$$

–para un campo escalar f y un campo vectorial $\boldsymbol{F}$– es invariante bajo (¿ante?) la transformación T? Bueno, esto sería que se cumple:

$$\nabla f' = \boldsymbol{F}'$$

donde $f', \boldsymbol{F}'$ son los campos transformados respectivos según (2,3). Veamos si esto es o no cierto. Por (4)

$$\nabla f' = [(T^t)^{-1}\nabla f] \circ T^{-1} \overset{(5)}{=} [(T^t)^{-1}\boldsymbol{F}] \circ T^{-1} = [(T^t)^{-1}T^{-1}T\boldsymbol{F}] \circ T^{-1} = (T^t)^{-1}T^{-1}\boldsymbol{F}'$$

de modo que nuestra ecuación es invariante si (y sólo si cuando los campo son arbitrarios)

$$(T^t)^{-1}T^{-1} = \text{identidad} \ ;$$

pero esto es equivalente a

$$(T^t)^{-1} = T \iff T^{-1} = T^t \ ,$$

vale decir si T es ortogonal. En resumen: *la ecuación (5) es invariante ante transformaciones lineales invertibles T si (y sólo si) T es ortogonal.*

Del mismo modo podemos analizar la ecuación

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = f \ . \tag{6}$$

[2]

Ahora

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}' = \left(\frac{\partial[(T\boldsymbol{F})_\alpha \circ T^{-1}]}{\partial x_\alpha}\right) = ((T^t)^{-1})_{\alpha,\beta} T_{\alpha,\gamma} \left(\frac{\partial F_\gamma}{\partial x_\beta}\right) \circ T^{-1}$$
$$= (T^{-1})_{\beta,\alpha} T_{\alpha,\gamma} \left(\frac{\partial F_\gamma}{\partial x_\beta}\right) \circ T^{-1} = (T^{-1}T)_{\beta,\gamma} \left(\frac{\partial F_\gamma}{\partial x_\beta}\right) \circ T^{-1}$$
$$= \delta_{\beta,\gamma} \left(\frac{\partial F_\gamma}{\partial x_\beta}\right) \circ T^{-1} = \left(\frac{\partial F_\gamma}{\partial x_\gamma}\right) \circ T^{-1} = (\operatorname{div} \boldsymbol{F}) \circ T^{-1} \overset{(6)}{=} f \circ T^{-1} = f' \; .$$

O sea: *la ecuación (6) es invariante ante todas las transformaciones lineales invertibles.*

Ahora considero la ecuación

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} \; . \tag{7}$$

Para ello resulta conveniente ver que

Lema: Si T es una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ entonces

$$(T\boldsymbol{A}) \wedge (T\boldsymbol{B}) = \det(T)\ (T^t)^{-1}(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \; .$$

La verificación de esta identidad es inmediata si usamos por ejemplo el tensor totalmente anti-simétrico $\epsilon_{jk\ell}$ (de Levi-Civita) para expandir el producto vectorial; lo dejo a su cargo.

Ahora,

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F}' = \nabla \wedge (T\boldsymbol{F} \circ T^1) = (TT^{-1}\nabla) \wedge (T\boldsymbol{F} \circ T^{-1} \overset{Lema}{=} \det(T)\ (T^t)^{-1}[(T^{-1}\nabla) \wedge (\boldsymbol{F} \circ T^{-1})]$$
$$= \det(T)\ (T^t)^{-1}T^{-1}(T^t)^{-1}[\nabla \wedge \boldsymbol{F}] \circ T^{-1} = \det(T)\ (T^t)^{-1}T^{-1}(T^t)^{-1}[\nabla \wedge \boldsymbol{F}] \circ T^{-1}$$
$$\overset{(7)}{=} \det(T)\ (T^t)^{-1}T^{-1}(T^t)^{-1}\boldsymbol{G} \circ T^{-1} = \det(T)\ (T^t)^{-1}T^{-1}(T^t)^{-1}(T^{-1}T)\boldsymbol{G} \circ T^{-1}$$
$$= \det(T)\ (T^t)^{-1}T^{-1}(T^t)^{-1}T^{-1}\boldsymbol{G}' \; ;$$

de modo que la ec. (7) es invariante si

$$\det(T)\ (T^t)^{-1}T^{-1}(T^t)^{-1}T^{-1} = \text{ identidad} \; .$$

Sea $S := TT^t$ entonces $\det(T)\ (T^t)^{-1}T^{-1}(T^t)^{-1}T^{-1} = \det(T)\ S^{-1}S^{-1}$ y, tomando la determinante de (E denota la matriz identidad 3×3)

$$\det(T)\ S^{-1}S^{-1} = E \iff \det(T)\ E = S^2$$

obtenemos –con $\det(S) = \det(T)^2$–

$$\det(T)^3 = \det(T)^4$$

de modo que $\det(T) = 1$ ya que $\det(T) \neq 0$. Como S es real simétrica y positiva semi-definida[3], es diagonalizable y sus autovalores son todos positivos. De $S^2 = E$ inferimos que hay un solo autovalor y es 1; por ende $TT^t = S = E$ de modo que T es ortogonal. Como $\det(T) = 1$, T es

[3] $S^t = (TT^t)^t = TT^t = S$ y $\boldsymbol{x} \cdot (S\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot (TT^t\boldsymbol{x}) = (T^t\boldsymbol{x}) \cdot (T^t\boldsymbol{x}) = \|T^t\boldsymbol{x}\|^2$.

una rotación. Luego: *la ecuación (7) es invariante ante transformaciones lineales invertibles T si (y sólo si) T es una rotación.*

Por último veamos la ecuación de Poisson

$$\Delta f = g \; . \tag{8}$$

Tenemos

$$\Delta f' = ((TT^t)^{-1})_{\alpha,\beta} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) \circ T^{-1} \; .$$

Si T es ortogonal obtenemos que $\Delta f' = (\Delta f) \circ T^{-1} = g'$. Y considerando todas las posibles ecuaciones de Poisson, obtenemos: *la ecuación de Poisson (8) es invariante ante transformaciones lineales invertibles T si (y sólo si) T es ortogonal.*

Consideremos las ecuaciones de Maxwell y solamente transformaciones lineales espaciales T entonces –como consecuencia de los resultados anteriormente descriptos– las ecuaciones de vínculo son invariantes; pero tendremos garantizada la invarianza de las ecuaciones dinámicas sólo cuando T es una rotación. Si entonces: (i) las fuentes ρ y $\boldsymbol{J}$ son T-invariantes (o sea $\rho' = \rho$ y $\boldsymbol{J'} = \boldsymbol{J}$); (ii) las condiciones iniciales son T-invariantes (o sea: $\boldsymbol{E}'|_{t=0} = \boldsymbol{E}|_{t=0}$ y $\boldsymbol{B}'|_{t=0} = \boldsymbol{B}|_{t=0}$); y (iii) las condiciones de borde (o asintóticas) son T-invariantes (o sea $\boldsymbol{E}'|_{\partial V} = \boldsymbol{E}|_{\partial V}$ y $\boldsymbol{B}'|_{\partial V} = \boldsymbol{B}|_{\partial V}$); *deducimos inmediatamente de un resultado de unicidad* que tanto $\boldsymbol{E}$ como $\boldsymbol{B}$ son T-invariantes si T es una rotación. Esto produce, en general, una simplificación del problema de resolver las ecuaciones de Maxwell sobre todo si hay “muchas” rotaciones T con las propiedades enumeradas.

Nota terminológica: Las transformaciones lineales invertibles de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ sobre los escalares $\mathbb{S}$ se anotan $GL(\mathcal{V})$. La composición de transformaciones lineales $(S \circ T)\boldsymbol{v} := S(T\boldsymbol{v})$ define un producto en $GL(\mathcal{V})$ que lo convierte en un grupo cuyo elemento neutro es la transformación identidad $\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{v}$. Si la dimensión de $\mathcal{V}$ es mayor a 1, este grupo no es conmutativo: en general $S \circ T \neq T \circ S$. $GL(\mathcal{V})$ está en correspondencia biunívoca (mediada por la elección de una base de $\mathcal{V}$) con las matrices $d \times d$ regulares (o invertibles, o no singulares)[4] cuyos elementos son escalares. La composición de mapas en $GL(\mathcal{V})$ se convierte en la multiplicación (usual) de matrices cuadradas. Con esta multiplicación como producto, las matrices cuadradas regulares forman un grupo cuyo elemento neutro es la matriz identidad E.
Si los escalares son $\mathbb{C}$ o bien $\mathbb{R}$ y $\mathcal{V}$ está equipado con un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$[5] entonces para cada $T \in GL(\mathcal{V})$ hay una única $S \in GL(\mathcal{V}$ tal que

$$\langle \boldsymbol{v}, T\boldsymbol{w} \rangle = \langle S\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle \text{ , para todo par } (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} \; ;$$

este S se anota T^* y se denomina *adjunto* de T. Si usamos una base ortonormal (con respecto al producto escalar especificado) entonces la matriz asociada con T^* es la matriz adjunta o transpuesta y complejo-conjugada: $[T^*]_{j,k} = \overline{[T]_{k,j}}$. Y por supuesto $[T^t]_{j,k} = [T]_{k,j}$. En el caso real, $T^* = T^t$. Con el producto escalar especificado podemos definir ciertos subgrupos

[4] El criterio necesario y suficiente es que la determinante no se anule.

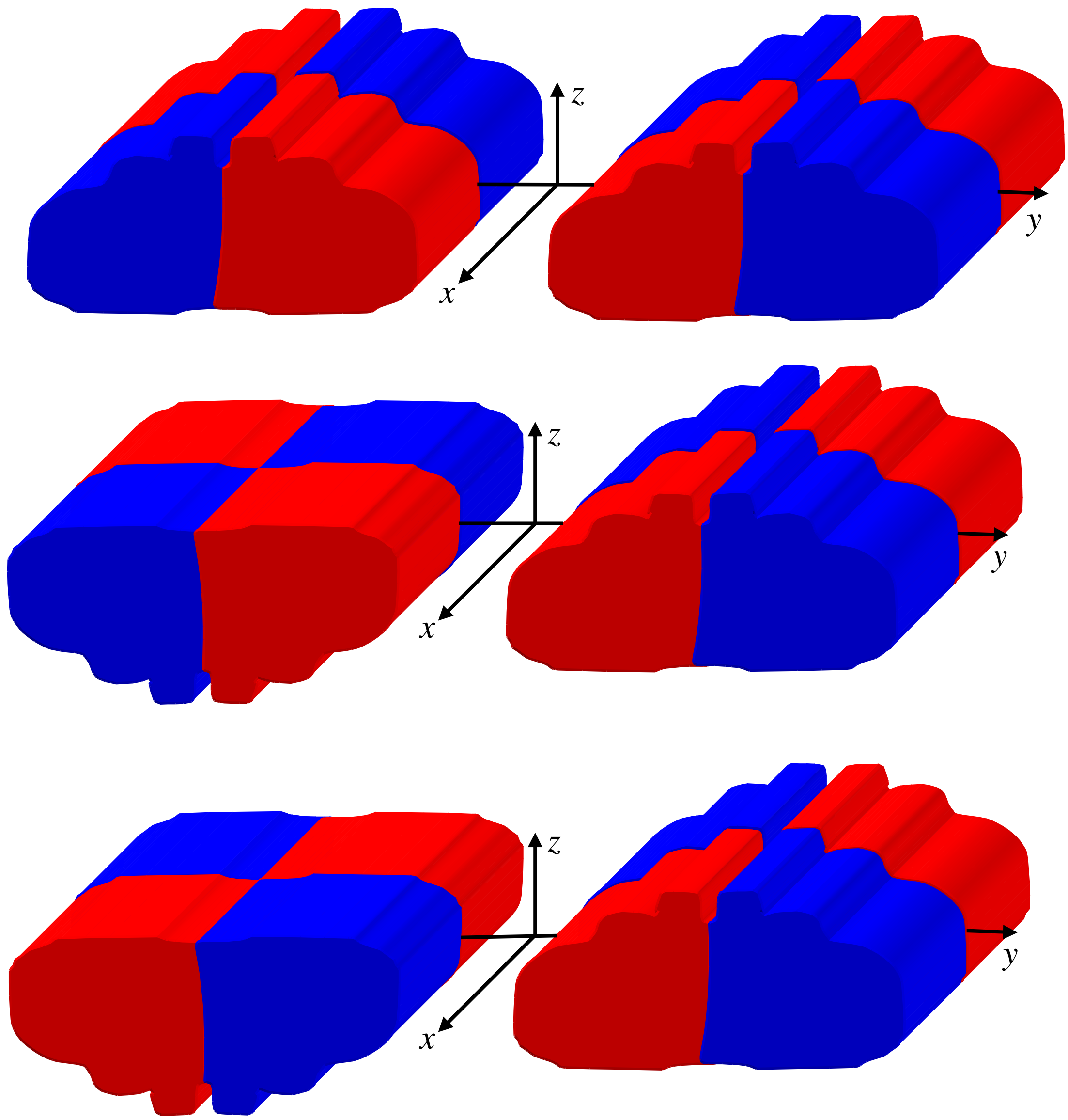
[5] En el caso complejo convenimos que el producto escalar es lineal en la segunda componente y conjugado-lineal en la primera.

de $GL(\mathcal{V})$ que son importantes debido a que "preservan la estructura geométrica inducida por el producto escalar". En el caso complejo ($\mathbb{S} = \mathbb{C}$) el grupo *unitario* dado por las $U \in GL(\mathcal{V})$ para las cuales $U^{-1} = U^*$ que se corresponderá (vía una base ortonormal) con las matrices complejas unitarias $U(d)$. En el caso real ($\mathbb{S} = \mathbb{R}$) el grupo *ortogonal* es el conjunto de las $T \in GL(\mathcal{V})$ para las cuales $T^{-1} = T^t$ que se corresponde con las matrices (reales) comunmente llamadas ortogonales. Este grupo se anota $O(d)$. Para transformaciones unitarias (u ortogonales) tenemos

$$\langle T\boldsymbol{v}, T\boldsymbol{w}\rangle = \langle \boldsymbol{v}, T^*T\boldsymbol{w}\rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle$$

de modo que estas "preservan ángulos" y largos (son isométricas $\|T\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{v}\|$). En dimensión finita, si T es ortogonal, tenemos $1 = \det(T^tT) = \det(T)^2$ de modo que $\det(T) = \pm 1$. Las transformaciones lineales ortogonales de determinate 1 forman un subgrupo (ya que $\det(ST) = \det(S)\det(T)$) anotado $SO(d)$.
Para $d = 3$ y escalares reales se tiene $\det(-E) = -1$ y si $T \in O(3)$ entonces $T \in SO(3)$ o bien $(-T) \in SO(3)$. Se puede demostrar que si $T \in SO(3)$ entonces T es una rotación: hay un eje (subespacio unidimensional) $\{p\widehat{\boldsymbol{e}} : \ p \in \mathbb{R}\}$ que es fijo bajo T y en el complemento ortogonal (bidimensional) de este eje T actua como una rotación. Si $T \notin SO(3)$ entonces es una reflexión respecto de un subespacio bidimensional (i.e. un plano) combinada con una rotación en ese plano (i.e., la componente ortogonal respecto al plano cambia de signo y la componente en el plano rota).

Como última página de esta nota mostramos los efectos de algunas transformaciones simples todas lineales. De arriba a abajo, se trata de una reflexión en el plano x, z (ortogonal de determinante -1), una rotación de 180^o (ortogonal de determinante 1) alrededor del eje "x" y de la inversión (determinante -1).



z
y
x
z
y
x
z
y
x