Facultad de Matemática, Astronomía y Física, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I – 2016

El radio de convergencia de la serie exponencial

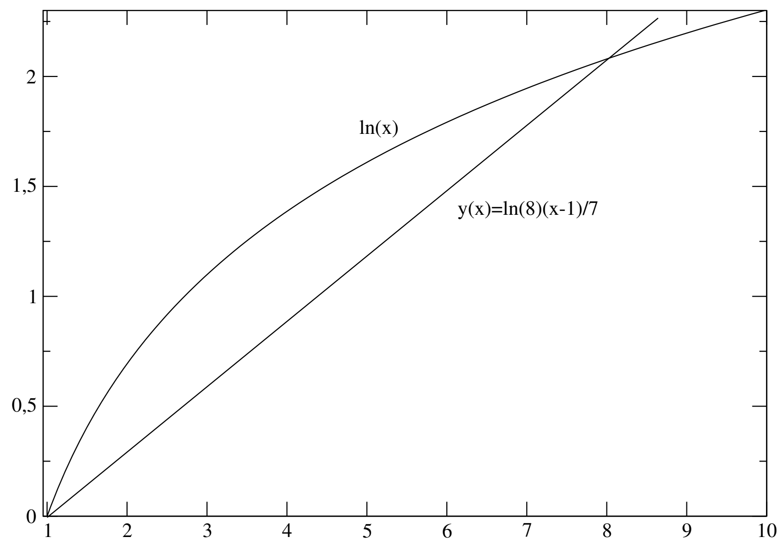


Figura 1: La función $1 \leq x \mapsto \ln(x)$ y la desigualdad $\ln(x) \geq \frac{\ln(8)}{7}(x-1)$ para $1 \leq x \leq 8$.

La serie exponencial para $z \in \mathbb{C}$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \; .$$

Considere

$$b_n := \sqrt[n]{n!} \; , \quad n = 1, 2, 3, \cdots \; .$$

Ya que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, tenemos que

$$\ln(b_n) = \frac{1}{n} \, \ln(n!) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \; .$$

Ahora la función real $1 < x \mapsto \ln(x)$ es cóncava de modo que (vea la figura)[1]:

$$\ln(k) \geq \frac{\ln(n) - \ln(1)}{n-1}(k-1) = \frac{\ln(n)}{n-1}\,(k-1) \; , \quad k = 1, 2, \cdots, n \; .$$

Pero entonces

$$\ln(b_n) = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \geq \frac{\ln(n)}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (k-1)$$

$$= \frac{\ln(n)}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{\ln(n)}{n(n-1)} \frac{n(n-1)}{2} = \ln(n)/2 \; ,$$

[1] Una alternativa:

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \geq \int_1^n \ln(x)\, dx = x(\ln(x) - 1)\,\big|_1^n = n \ln(n) - n + 1 \; .$$

de modo que –ya que la función exponencial real es monótona creciente–

$$\sqrt[n]{n!} = b_n \geq \sqrt{n} \ ,$$

y entonces

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \ .$$

El radio de convergencia es

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}(1/b_n)} = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty \ ;$$

la serie exponencial es convergente en todo el plano complejo y uniformemente convergente en todo conjunto cerrado y acotado (pues cabe en un $\overline{D(0,r)}$).