Métodos Matemáticos de la Física II – 2017
Solución Problema 3, Guía 2 (G. Dotti)

Consideremos el sistema de EDs para $x(t), y(t)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(t) & -\mathrm{sen}(t) \\ \mathrm{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}}_{M(t)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

Podemos verificar que

$$M(t)M(s) = M(s)M(t), \quad \forall\, t, s \tag{2}$$

ya sea usando identidades trigonométricas o simplemente notando que $M(t)$ es la matriz que representa una rotación de $t$ radianes en sentido horario en $\mathbb{R}^2$, y que el orden de dos rotaciones consecutivas en el plano es irrelevante.

La condición (2) implica que la solución de (1) es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \exp\left(\int_0^t M(s)ds\right) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_o \end{pmatrix}, \tag{3}$$

donde la integral de una matriz se define componente a componente. En nuestro caso es

$$\int_0^t M(s)ds = \begin{pmatrix} \mathrm{sen(t)} & \cos(t) - 1 \\ 1 - \cos(t) & \mathrm{sen(t)} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \tag{4}$$

Evaluando (3) en $t = 0$, y usando que la exponencial de la matriz nula es la identidad, verificamos que las constantes $x_o, y_o$ son respectivamente $x(0)$ e $y(0)$.

Debajo vamos a probar la siguiente fórmula

$$\text{Si } K = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \text{ entonces } e^K = e^A \begin{pmatrix} \cos(B) & \mathrm{sen}(B) \\ -\mathrm{sen}(B) & \cos(B) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Combinando (3) (4) y (5) obtenemos la solución de (1):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\mathrm{sen}(t)} \begin{pmatrix} \cos(\cos(t) - 1) & \mathrm{sen}(\cos(t) - 1) \\ -\mathrm{sen}(cos(t) - 1) & \cos(\cos(t) - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} \tag{6}$$

---

Para probar (5) empezamos por buscar los autovalores $\lambda$ de $K$:

$$0 = \det(K - \lambda I) = (A - \lambda)^2 + B^2 \Rightarrow \lambda = \lambda_\pm := A \pm iB$$

Dos posibles autovectores $\vec{e}_\pm$ de (respectivamente) $\lambda_\pm$ son (recordar que un autovector multiplicado por un escalar sigue siendo autovector del mismo autovalor; no nos vamos a preocupar por la normalización):

$$\vec{e}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad\qquad \vec{e}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Esto implica que la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

satisface (verificar)

$$P^{-1}KP = \begin{pmatrix} A + iB & 0 \\ 0 & A - iB \end{pmatrix} = J$$

De manera que $\exp(K) = \exp(PJP^{-1}) = P\exp(J)P^{-1}$, esto es

$$\exp(K) = \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{A+iB} & 0 \\ 0 & e^{A-iB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = e^A \begin{pmatrix} \cos(B) & \mathrm{sen}(B) \\ -\mathrm{sen}(B) & \cos(B) \end{pmatrix},$$

que es la fórmula (5).