

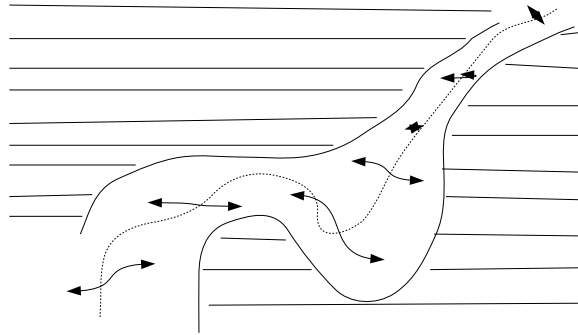
# Ondas Guiadas

G.A. Raggio, Octubre 2011<sup>1</sup>

El problema es analizar la posibilidad teórica de la existencia de ondas electromagnéticas que se propaguen en volúmenes confinados como tubos o cavidades; o sea de ondas “guiadas”. Para que esto sea posible es necesario que el material confinante (pared del tubo) sea un conductor lo más perfecto posible. Sino, habrá transmisión de ondas al material confinante, se perderá energía y la onda se disipará en la nada. Recuerde que para un conductor de conductancia  $\sigma$  inmerso en algún medio, una onda monocromática (de frecuencia  $\omega$ ) en el medio penetra en el conductor con una atenuación exponencial  $\propto e^{-h/\delta}$  en la distancia  $h$  a la interfase con “distancia de penetración”

$$\delta \propto 1/\sqrt{\mu_c \sigma \omega}$$

donde  $\mu_c$  es la permeabilidad magnética del conductor. Para que no perdamos energía,  $\delta$  debe ser lo más pequeño posible: gran conductancia y alta frecuencia.



Consideraremos en lo que sigue el caso de que el conductor es perfecto; formalmente la conductancia es  $\infty$  y  $\delta = 0$  además las condiciones en la interfase medio/conductor se reducen a:

$$(1) \quad \boxed{\mathbf{n} \wedge \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \& \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ en la superficie de la interfase}},$$

ya que dentro del conductor perfecto  $\mathbf{E} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$ .

El modelo simple que planteamos es el de un tubo recto (finito o no) de sección transversal  $A$  constante (y finita).

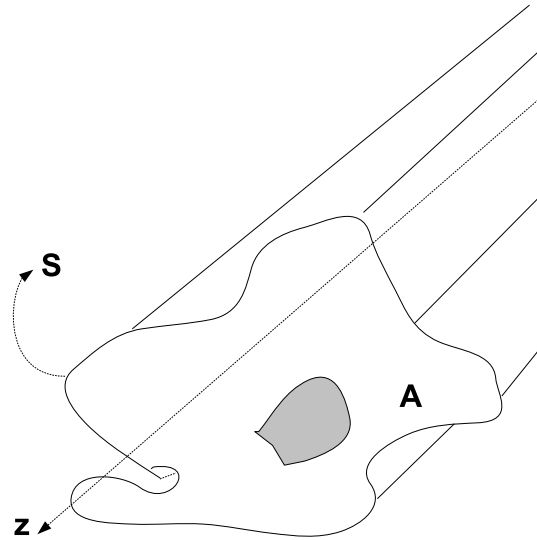
Consideramos primeramente el caso de un tubo infinito. Eligiendo el eje del tubo coincidente con la dirección  $\hat{\mathbf{z}}$ , el tubo en el caso infinito es:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A \subset \mathbb{R}^2\}$$

---

<sup>1</sup>Con correcciones y extensiones de octubre 2017 hasta marzo 2018.

donde  $A$  es una región del plano finita, cerrada y acotada de borde  $\partial A$ .  $A$  puede o no tener agujeros (en terminología matemática:  $A$  puede ser simplemente conexa o no) lo que tendrá consecuencias, como veremos, sobre la naturaleza de las ondas que viven en el tubo.



Buscamos soluciones de las ec. de Maxwell en el tubo infinito que sean ondas monocromáticas que se propaguen a lo largo del tubo en la dirección axial con número de onda  $k$  positivo o negativo:

$$(2) \quad \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(x, y) \exp\{i(kz - \omega t)\} \quad \& \quad \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(x, y) \exp\{i(kz - \omega t)\} .$$

En tal caso las “amplitudes”  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  viajan con velocidad de fase  $\omega/k$ . Estas *amplitudes son campos vectoriales complejos sobre  $A$  y aquí reservamos este término para denotar a cualquier par de campos de este tipo.*

Si insertamos el Ansatz (2) en las ec. de evolución de Maxwell, las derivadas temporales y aquellas parciales respecto de la coordenada axial  $z$  son triviales y si el material en el tubo tiene permeabilidad magnética  $\mu$  y permitividad eléctrica  $\epsilon$  obtenemos

$$(3a) \quad \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} = i\omega B_3 \quad \frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} = -i\omega\mu\epsilon E_3$$

$$(3b) \quad \frac{\partial E_3}{\partial y} - ikE_2 = i\omega B_1 \quad \frac{\partial B_3}{\partial y} - ikB_2 = -i\omega\mu\epsilon E_1$$

$$(3c) \quad -\frac{\partial E_3}{\partial x} + ikE_1 = i\omega B_2 \quad -\frac{\partial B_3}{\partial x} + ikB_1 = -i\omega\mu\epsilon E_2$$

Si  $\mathbf{v}$  es un vector arbitrario su parte transversal es  $\mathbf{v}^\perp := \mathbf{v} - (\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{v})\hat{\mathbf{z}} = v_1\hat{\mathbf{x}} + v_2\hat{\mathbf{y}} = (\hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{v}) \wedge \hat{\mathbf{z}}$ . Entonces  $\mathbf{v} = (\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{v})\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{v}^\perp = v_3\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{v}^\perp$  es una descomposición ortogonal. Observese que los vectores ortogonales a  $\hat{\mathbf{z}}$  son exactamente los vectores transversales  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^\perp$ ; que  $\mathbf{v} \wedge \hat{\mathbf{z}}$  es transversal (pues es ortogonal a  $\hat{\mathbf{z}}$ ); y que el producto vectorial de dos vectores transversales es proporcional<sup>2</sup> a  $\hat{\mathbf{z}}$ :  $\mathbf{a}^\perp \wedge \mathbf{b}^\perp \propto \hat{\mathbf{z}}$ .

Las ec. de vínculo  $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0$ , son

$$(4) \quad \boxed{\operatorname{div} \mathbf{E}^\perp = -ikE_3, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}^\perp = -ikB_3}.$$

Viendo a (3a-3c) como ecuaciones lineales para las componentes de los campos y sus derivadas parciales vemos que podemos expresar las componentes transversales (al eje  $\hat{\mathbf{z}}$ )  $E_1, E_2, B_1$  y  $B_2$  en términos de las componentes axiales  $E_3, B_3$  y sus derivadas:

$$(5a) \quad -i(\omega^2\mu\epsilon - k^2)E_1 = k\frac{\partial E_3}{\partial x} + \omega\frac{\partial B_3}{\partial y}, \quad -i(\omega^2\mu\epsilon - k^2)E_2 = k\frac{\partial E_3}{\partial y} - \omega\frac{\partial B_3}{\partial x}$$

$$(5b) \quad -i(\omega^2\mu\epsilon - k^2)B_1 = k\frac{\partial B_3}{\partial x} - \omega\mu\epsilon\frac{\partial E_3}{\partial y}, \quad -i(\omega^2\mu\epsilon - k^2)B_2 = k\frac{\partial B_3}{\partial y} + \omega\mu\epsilon\frac{\partial E_3}{\partial x}$$

Es notable que las ec. (3a-3c) –y por ende (5a-5b)– así como los vínculos (4) son invariantes ante las transformaciones

$$(6) \quad k' = -k, \quad E_3' = E_3, \quad \mathbf{E}'^\perp = -\mathbf{E}^\perp, \quad B_3' = -B_3, \quad \mathbf{B}'^\perp = \mathbf{B}^\perp,$$

$$(7) \quad k'' = -k, \quad E_3'' = -E_3, \quad \mathbf{E}''^\perp = \mathbf{E}^\perp, \quad B_3'' = B_3, \quad \mathbf{B}''^\perp = -\mathbf{B}^\perp,$$

que invierten ambas la dirección de propagación<sup>3</sup>. Los campos dados por (2) reemplazando  $k$  por  $-k$  con amplitudes  $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$  o bien  $(\mathbf{E}'', \mathbf{B}'')$  son también soluciones de las ec. de Maxwell. Usando la descomposición longitudinal/transversal, la propiedad de que tanto  $\nabla E_3$  como  $\nabla B_3$  son transversales (ya que  $E_3, B_3$  no dependen de la variable axial); y el hecho de que  $\hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{v}^\perp = v_1\hat{\mathbf{y}} - v_2\hat{\mathbf{x}}$ ; y solo estas tres propiedades, podemos reescribir (5a-5b) en forma más compacta y útil:

$$(8) \quad \gamma^2 \mathbf{E}^\perp = i(k \nabla E_3 - \omega \hat{\mathbf{z}} \wedge \nabla B_3) \quad \& \quad \gamma^2 \mathbf{B}^\perp = i(k \nabla B_3 + \omega \mu \epsilon \hat{\mathbf{z}} \wedge \nabla E_3);$$

donde hemos introducido

$$(9) \quad \gamma^2 := \omega^2\mu\epsilon - k^2$$

adelantándonos a lo que veremos prontamente de que este número –que desconocemos y del cual pretendemos probar que existe– es no-negativo. Además cabe recordar que

$$v := 1/\sqrt{\mu\epsilon}$$

sería la velocidad de propagación de ondas para el medio que llena el tubo.

<sup>2</sup>Calcule  $\hat{\mathbf{z}} \wedge (\mathbf{a}^\perp \wedge \mathbf{b}^\perp)$ .

<sup>3</sup>Observe que  $\mathbf{E}'' = -\mathbf{E}'$  y  $\mathbf{B}'' = -\mathbf{B}'$ .

Para obtener (3a-3c) y por ende (5a,5b) y (8) sólo empleamos el Ansatz (2) y las ec. de evolución. De la ec. de ondas para  $\tilde{\mathbf{E}}$  y para  $\tilde{\mathbf{B}}$  obtenemos la ecuación de Helmholtz (ec. de onda para onda monocromática) para las componentes axiales:

$$(10) \quad \{\Delta^\perp + \gamma^2\}E_3 = 0 \quad \& \quad \{\Delta^\perp + \gamma^2\}B_3 = 0$$

denotando con  $\Delta^\perp$  al Laplaciano bidimensional  $\Delta^\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . Las ecuaciones de vínculo (4) son consecuencia de (8) cuando se cumple (10).

Quedan entonces por discutir las condiciones de borde (1). Y acá es donde la “rectitud” del tubo nos simplifica enormemente la tarea (lo que no emerge claramente en mi lectura de los clásicos). Puesto que la sección transversal (proyección en un plano ortogonal al eje) es constante (e igual a  $A$ ) la normal  $\mathbf{n}$  a la superficie del borde del tubo es siempre un vector en  $A$  y por ende **transversal**. Entonces descomponiendo los campos longitudinal/transversalmente en (1) obtenemos para la condición de borde del campo eléctrico

$$(11) \quad \mathbf{0} = \mathbf{n} \wedge (E_3 \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{E}^\perp) = E_3 \underbrace{(\mathbf{n} \wedge \hat{\mathbf{z}})}_{\text{transversal}} + \underbrace{\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}^\perp}_{\propto \hat{\mathbf{z}}} \Leftrightarrow \boxed{E_3 \equiv 0 \quad \& \quad \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}^\perp = \mathbf{0}}$$

en  $\partial A$  el borde de  $A$ . Y para el campo magnético

$$(12) \quad 0 = \mathbf{n} \cdot (B_3 \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{B}^\perp) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}^\perp \iff \boxed{\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}^\perp = 0}$$

en  $\partial A$ . Observe que si el par  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  satisface estas dos condiciones de borde entonces también lo hacen los pares dados por (6) y por (7).

A esta altura del partido el problema de la existencia de ondas en el tubo está planteado de la siguiente manera: resuelva las dos ec. de Helmholtz (10) de modo que con la relación (8) se cumplan las condiciones (11) y (12); las ec. de vínculo (4) se cumplen automáticamente. Observe que las dos ec. de Helmholtz son problemas de autovalores para el Laplaciano en  $A$  condicionados por (11) y (12) via (8). Puesto así, la discusión prosigue distinguiendo el caso  $E_3 = B_3 \equiv 0$  donde ambos campos son transversales (como en el caso de ondas planas sin dispersión) de aquel donde hay alguna componente axial, sea esta  $E_3$  o  $B_3$  que no es idénticamente nula.

### Ondas transversales (T o TEM)

Si  $E_3 = B_3 \equiv 0$  tanto  $\mathbf{E}$  como  $\mathbf{B}$  son transversales de donde el apelativo T (o TEM -transverse electromagnetic). Parte de la condición (11) se cumple automáticamente y queda solamente  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}|_{\partial A} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}|_{\partial A} = 0$ . La relación (5b) implica que si  $\gamma^2 \neq 0$  entonces  $\mathbf{E} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$  y no hay onda alguna. Nos interesa entonces  $\gamma^2 = 0$ ; y, en tal caso,  $|k| = \omega \sqrt{\mu\epsilon} = \omega/v$  que sería el número de onda de una onda plana monocromática de frecuencia  $\omega$  en un medio de velocidad  $v$  moviéndose hacia  $z > 0$  o hacia  $z < 0$  dependiendo del signo de  $k$ . De la ec. (3a-3c) obtenemos

$$\mathbf{B} = (k/\omega)(\hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{E}), \quad \nabla \wedge \mathbf{E} = \mathbf{0},$$

y con la ec. de vínculo  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  hemos reducido al problema al caso ya conocido de ondas planas. Cuando  $A$  es simplemente conexa, habrá un potencial  $\Phi$  que no depende de la coordenada axial  $z$  tal que  $\nabla \Phi = \mathbf{E}$  ( $\mathbf{E}$  es transversal) con  $\Delta \Phi = 0$ . Pero, en el borde  $\partial A$  de  $A$  tenemos:

$$0 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}|_{\partial A} = (k/\omega)\mathbf{n} \cdot (\hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{E})|_{\partial A} = (k/\omega)\mathbf{E}|_{\partial A} \cdot (\mathbf{n} \wedge \hat{\mathbf{z}}).$$

Necesariamente  $\mathbf{E}|_{\partial A} = \mathbf{0}$  y por ende  $\Phi|_{\partial A}$  es constante. Cuando la sección transversal  $A$  es simplemente conexa, necesariamente la función armónica  $\Phi$  debe ser constante en todo  $A$  de donde  $\mathbf{E}$  y luego  $\mathbf{B}$  son campos nulos: *No hay ondas transversales si la sección es simplemente conexa.*

Si  $A$  tiene agujeros –como en el caso de la figura que ilustra nuestro tubo– entonces debemos resolver la ecuación de Laplace en  $A$  con valores constantes en los (distintos) bordes (hay por lo menos dos) y la solución no es constante lo que produce un campo  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  ambos no nulos. Hay una variante de la argumentación anterior. Volviendo a las ecuaciones (3a-5b), cuando  $E_3 = B_3 = 0$  estas son equivalentes a  $kv = \omega$ , y

$$(13) \quad \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} = 0;$$

$$(14) \quad vB_2 = E_1, \quad vB_1 = -E_2.$$

Las ec. de vínculo (4) se reducen a  $\text{div } \mathbf{E}^\perp = \text{div } \mathbf{B}^\perp = 0$ , o sea:

$$(15) \quad \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} = 0.$$

Observamos que (13) y (15) constituyen las ecuaciones de Cauchy-Riemann para las funciones complejas  $E_1 - iE_2$  y  $B_1 - iB_2$  respectivamente. Por lo tanto  $(E_1, -E_2)$  y  $(B_1, -B_2)$  son pares de armónicas conjugadas. Además con (14), hay que determinar uno sólo de estos pares. Precisamente: *Si  $E_1, E_2$  cumplen*

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} = 0 = \frac{\partial E_1}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial x} \text{ en } A, \text{ y } n_2 E_1 - n_1 E_2 = 0 \text{ en } \partial A,$$

*entonces las amplitudes ( $\mathbf{E} = (E_1, E_2, 0)$ ,  $\mathbf{B} = v^{-1}(\hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{E})$ ) que son transversales, generan por (16) campos que cumplen las ec. de Maxwell y la condición de borde (1). Alternativamente, si  $B_1, B_2$  satisfacen*

$$\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} = 0 = \frac{\partial B_1}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial x} \text{ en } A, \text{ y } n_1 B_1 + n_2 B_2 = 0 \text{ en } \partial A$$

*entonces las amplitudes transversales ( $\mathbf{E} = v(\mathbf{B} \wedge \hat{\mathbf{z}})$ ,  $\mathbf{B} = (B_1, B_2, 0)$ ) generan campos por (16) que son soluciones de las ec. de Maxwell y satisfacen las condiciones de borde (1).*

El problema de ondas TEM se reduce entonces a encontrar (por ejemplo) el par de armónicas conjugadas  $(B_1, -B_2)$  en  $A$  con  $n_1 B_1 + n_2 B_2 = 0$  en  $\partial A$ .

### Ondas no transversales

Una de las dos componentes axiales  $E_3, B_3$  no se anula. Considerese primero el caso  $\gamma^2 \neq 0$ ; en el cual  $|k| \neq \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \omega/v$ . Podemos, dividiendo (8) por  $\gamma^2$ , expresar los campos transversales en términos de los axiales y sus derivadas:

$$(16) \quad \mathbf{E}^\perp = i\gamma^{-2}(k\nabla E_3 - \omega\hat{\mathbf{z}} \wedge \nabla B_3) \quad \& \quad \mathbf{B}^\perp = i\gamma^{-2}(k\nabla B_3 + (\omega/v^2)\hat{\mathbf{z}} \wedge \nabla E_3).$$

Con esto en la condición de borde eléctrica (11), en  $\partial A$

$$(17) \quad \mathbf{0} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}^\perp \propto k(\mathbf{n} \wedge \nabla E_3) - \omega \underbrace{(\mathbf{n} \wedge (\widehat{\mathbf{z}} \wedge \nabla B_3))}_{=(\mathbf{n} \cdot \nabla B_3)\widehat{\mathbf{z}} - (\mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{z}})\nabla B_3} = k(\mathbf{n} \wedge \nabla E_3) - \omega(\mathbf{n} \cdot \nabla B_3)\widehat{\mathbf{z}};$$

y en la condición de borde magnética (12)

$$(18) \quad 0 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}^\perp \propto k\mathbf{n} \cdot \nabla B_3 + (\omega/v^2) \underbrace{\mathbf{n} \cdot (\widehat{\mathbf{z}} \wedge \nabla E_3)}_{=-(\mathbf{n} \wedge \nabla E_3) \cdot \widehat{\mathbf{z}}} = k\mathbf{n} \cdot \nabla B_3 - (\omega/v^2)(\mathbf{n} \wedge \nabla E_3) \cdot \widehat{\mathbf{z}}.$$

Pero de la primera relación (17) obtenemos

$$(\mathbf{n} \wedge \nabla E_3) \cdot \widehat{\mathbf{z}} = \frac{\omega}{k}(\mathbf{n} \cdot \nabla B_3), \quad \text{en } \partial A,$$

lo que insertado en la segunda relación (18) nos da  $0 = -(\gamma^2/k)(\mathbf{n} \cdot \nabla B_3)$  en  $\partial A$ . O sea  $\mathbf{n} \cdot \nabla B_3 = 0$  y luego  $\mathbf{n} \wedge \nabla E_3 = \mathbf{0}$ . Es trivial que estas dos ultimas relaciones implican a su vez (17) y (18). Pero calculemos  $\mathbf{n} \wedge \nabla E_3$ . Sea  $(x_o, y_o) \in \partial A$ ; rotando un poquitito el sistema de coordendas podemos suponer que la tangente a la curva que describe a  $\partial A$  en  $(x_o, y_o)$  no es ni horizontal ni vertical. Hay entonces un entorno  $X$  de  $x_o$  (suficientemente chico) tal que la curva mencionada está dada por una función  $y = \xi(x)$  con  $y_o = \xi(x_o)$  y tal que  $\xi'$  no se anula en  $X$ . Entonces la recta normal a la curva en  $(x_o, y_o)$  tiene a

$$(y - y_o) = \frac{-1}{\xi'(x_o)}(x - x_o)$$

como ecuación determinante. La normal en  $(x_o, y_o)$  es por ello

$$\mathbf{n} = c[\xi'(x_o)\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}]$$

donde  $c$  es una constante de normalización positiva multiplicada por un signo. Entonces

$$(\mathbf{n} \wedge \nabla E_3)(x_o, y_o) \propto \xi'(x_o) \left( \frac{\partial E_3}{\partial y} \right) (x_o, y_o) + \left( \frac{\partial E_3}{\partial x} \right) (x_o, y_o);$$

pero, por la regla de la cadena aplicada a la función  $X \ni x \mapsto g(x) := E_3(x, \xi(x))$ ,

$$g'(x_o) = \left( \frac{\partial E_3}{\partial x} \right) (x_o, y_o) + \xi'(x_o) \left( \frac{\partial E_3}{\partial y} \right) (x_o, y_o),$$

y esto se anula ya que  $g$  es constante. Por lo tanto,  $\mathbf{n} \wedge \nabla E_3 = \mathbf{0}$  en  $\partial A$ . y las condiciones de borde (11) y (12) son equivalentes a:

$$(19) \quad \boxed{E_3 \equiv 0 \ \& \ \mathbf{n} \cdot \nabla B_3 = 0 \ \text{en } \partial A},$$

que son condiciones expresadas directamente en términos de las componentes axiales.

Veamos que la solución general del par de ecuaciones de Helmholtz (10) con partes transversales de acuerdo a (16) y con condición de contorno (19) es una superposición lineal de dos soluciones especiales; una con  $B_3 \equiv 0$  llamadas TM (transversal magnéticas pues el campo  $\mathbf{B}$  es transversal) y otra con  $E_3 \equiv 0$  llamadas TE (transversal eléctricas por razón análoga). En efecto, si tenemos una solución  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ , defino nuevos campos:

$$\mathbf{E}^{(1)} := E_3 \widehat{\mathbf{z}} + ik\gamma^{-2} \nabla E_3, \quad \mathbf{B}^{(1)} := i \frac{\omega}{\gamma^2 v^2} \widehat{\mathbf{z}} \wedge \nabla E_3;$$

$$\mathbf{E}^{(2)} := -i\frac{\omega}{\gamma^2} \hat{\mathbf{z}} \wedge \nabla B_3, \quad \mathbf{B}^{(2)} := B_3 \hat{\mathbf{z}} + ik\gamma^{-2} \nabla B_3;$$

Entonces  $\mathbf{B}^{(1)}$  es transversal o nulo, el par  $(\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{B}^{(1)})$  cumple (10) y (16), y la condición de contorno (19) se cumple (pues el par de campos originales lo hacen). Por otro lado, el campo  $\mathbf{E}^{(2)}$  es transversal o nulo, el par  $(\mathbf{E}^{(2)}, \mathbf{B}^{(2)})$  cumple (10) y (16) y se respeta (19). Pero trivialmente,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)}$  y  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{B}^{(2)}$ . Basta entonces analizar cada una de las dos soluciones especiales:

1. Ondas TM (transversal magnéticas).  $B_3 \equiv 0$  en todo  $A$  con lo cual efectivamente el campo  $\mathbf{B}$  es transversal; y  $E_3 \equiv \psi$  donde

$$\Delta^\perp \psi = -\gamma^2 \psi \quad \& \quad \psi|_{\partial A} \equiv 0.$$

Se cumplen entonces las condiciones (19). Se tiene entonces:

$$\mathbf{E}^\perp = ik\gamma^{-2} \nabla \psi \quad \& \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}^\perp = \frac{i\omega}{\gamma^2 v^2} \hat{\mathbf{z}} \wedge \nabla \psi.$$

Las transformaciones (6) y (7) transforman estas ondas TM en ondas TM con dirección de propagación opuesta.

2. Ondas TE (transversal eléctricas).  $E_3 \equiv 0$  en todo  $A$  y el campo  $\mathbf{E}$  es entonces transversal; y  $B_3 \equiv \psi$  donde

$$\Delta^\perp \psi = -\gamma^2 \psi \quad \& \quad \mathbf{n} \cdot \nabla \psi|_{\partial A} \equiv 0.$$

Se cumplen entonces las condiciones (19). Se tiene entonces:

$$\mathbf{B}^\perp = ik\gamma^{-2} \nabla \psi \quad \& \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}^\perp = \frac{-i\omega}{\gamma^2} \hat{\mathbf{z}} \wedge \nabla \psi.$$

Las transformaciones (6) y (7) transforman estas ondas TE en ondas TE con dirección de propagación opuesta.

Demostramos ahora que como adelantado  $\gamma^2 \geq 0$ . Para ello consideremos la ec. de Helmholtz en  $A$  con condiciones de Dirichlet o de Neumann, i.e.,

$$\Delta^\perp \psi = \lambda \psi \quad \& \quad \psi|_{\partial A} = 0 \quad \text{o bien} \quad \mathbf{n} \cdot \nabla \psi|_{\partial A} = 0.$$

De acuerdo a la primera identidad de Green

$$\begin{aligned} \lambda \int_A |\psi(x, y)|^2 d\sigma &= \int_A \overline{\psi(x, y)} (\Delta^\perp \psi)(x, y) d\sigma \\ &= - \int_A |(\nabla \psi)(x, y)|^2 d\sigma + \underbrace{\int_{\partial A} \overline{\psi(x, y)} (\mathbf{n} \cdot \nabla \psi)(x, y) ds}_{=0 \text{ por Dirichlet o Neumann}} \\ &= - \int_A |(\nabla \psi)(x, y)|^2 d\sigma \end{aligned}$$

donde  $d\sigma$  es el elemento de área de  $A$ ;  $ds$  es el elemento de línea de  $\partial A$  orientado convenientemente. Luego los autovalores del problema de Dirichlet/Neumann para el Laplaciano en  $A$  son no-positivos. Trasladado a  $-\gamma^2$  obtenemos efectivamente que  $\gamma^2$  es no-negativo.

El problema del espectro del Laplaciano con condiciones de borde de Dirichlet o Neumann está muy bien entendido (ver e.g.: *G.B. Folland: Introduction to Partial Differential Equations, Princeton University Press, Princeton NJ, 1995.*). El resultado fundamental es:

TEOREMA: Sea  $A$  un dominio en  $\mathbb{R}^2$  cerrado, acotado y conexo, entonces hay una sucesión denumerables  $\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$  de números no-negativos  $\gamma_n$  tales que  $-\gamma_n^2$  son los autovalores del Laplaciano con condiciones de Dirichlet (o de Neumann) en  $\partial A$ . Si enumeramos de modo que  $\gamma_{n+1} > \gamma_n$ , se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \infty$ . Los autovalores son todos de multiplicidad finita y las autofunciones asociadas son  $\mathcal{C}^\infty(A)$ .

Como consecuencia de este resultado matemático obtenemos la siguiente imagen cualitativa para ondas TM o TE en un tubo recto de sección transversal constante con o sin agujeros pero conexa.

Definiendo las frecuencias angulares

$$\omega_n := v\gamma_n = \gamma_n/\sqrt{\mu\epsilon}$$

con la sucesión  $\{0 \neq \gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ , y usando la relación (9) o sea  $\gamma_n^2 = (\omega/v)^2 - k^2$ , es posible una onda (TM o TE según el caso) (2) con número de onda  $k > 0$  si

$$\omega = \sqrt{\omega_n^2 + k^2 v^2} > \omega_n$$

para algún  $n \in \mathbb{N}$  tomando para  $\psi$  en 1. o 2. (según el caso) una autofunción asociada al autovalor  $-\gamma_n^2$ . Equivalentemente, si  $\omega > \omega_n$  para algún  $n \in \mathbb{N}$  entonces hay una onda (2) con número de onda

$$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_n^2}}{v}.$$

La velocidad de fase de esta onda es

$$\frac{\omega}{k} = v\sqrt{1 + (\gamma_n/k)^2} > v;$$

mientras que la velocidad de grupo es

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{vk}{\sqrt{\gamma_n^2 + k^2}} = kv^2/\omega < v.$$

Esto se ilustra gráficamente en las figuras 1. A dado valor de la frecuencia  $\omega = \nu$  tendremos tantas ondas (2) como el número de modos con  $\omega_n < \nu$ . En particular la guía soporta una onda si  $\omega$  es mayor que el modo no-nulo menor de todos los modos TM y TE no nulos.



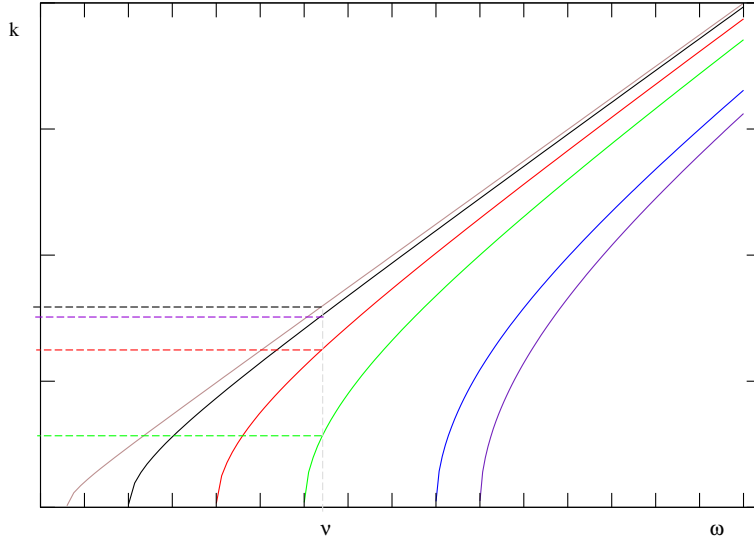


Figura 1: Curvas  $k$  vs.  $\omega$  de los distintos modos

Esto completa el análisis del caso de ondas no transversales cuando  $\gamma^2 \neq 0$ . Nos falta delucidar la posibilidad de ondas no transversales en el caso  $\gamma^2 = 0$ . La ec. de Helmholtz (10) para  $E_3$  degenera en una ec. de Laplace cuya única solución que cumple con (11) es  $E_3 \equiv 0$ . Pero entonces de (3a-3c) obtenemos  $(\partial B_3/\partial x) = (\partial B_3/\partial y) = 0$  con lo cual  $B_3$  es constante.

### Cavidades con simetría axial

Obtenemos una cavidad de simetría axial si el tubo es ahora finito delimitado por  $z = 0$  y  $z = d$ . A las condiciones de borde (11) y (12) en  $\partial A$  se les agrega

$$(20) \quad \boxed{\mathbf{E}^\perp = \mathbf{0}, \quad B_3 = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ y } z = d} .$$

Si superponemos dos ondas TE o TM que se propagan en dirección opuesta obtenemos una solución de las ec. de Maxwell para el tubo infinito que cumplen con las condiciones de contorno (19) en  $\partial A$  ya que estas son homogéneas. ¿Hay o no una superposición que cumpla además la condición (20)? Si las amplitudes  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  son campos definidos en  $A$  donde cumplen las ec. de Helmholtz (10) y las condiciones de borde (19) con componentes transversales dadas por (16) –o sea  $(\mathbf{E}e^{i(kz-\omega t)}, \mathbf{B}e^{i(kz-\omega t)})$  es superposición arbitraria de ondas TE y TM con el mismo  $k$ ; entonces usando (6),

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}} &= \mathbf{E}(x, y)e^{i(kz-\omega t)} + \mathbf{E}'(x, y)e^{i(-kz-\omega t)} = 2e^{-i\omega t}[i\mathbf{E}^\perp \sin(kz) + E_3 \hat{\mathbf{z}} \cos(kz)] , \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \mathbf{B}(x, y)e^{i(kz-\omega t)} + \mathbf{B}'(x, y)e^{i(-kz-\omega t)} = 2e^{-i\omega t}[\mathbf{B}^\perp \cos(kz) + iB_3 \hat{\mathbf{z}} \sin(kz)] . \end{aligned}$$

La condición (20) se cumple si y sólo si (para campos no nulos)

$$(21) \quad k = k_n := n\pi/d, \quad \text{con } n \in \mathbb{N}_+ .$$

También podríamos superponer al par  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  con  $(\mathbf{E}'', \mathbf{B}'')$  pero, en este caso, se obtienen amplitudes nulas.

La generalidad es sólo aparente pues para tener superposición de ondas TM y TE (de la misma frecuencia y número de onda) tanto  $E_3$  como  $B_3$  deben ser autofunciones **al mismo autovalor**  $-\gamma^2 = k_n^2 - (\omega/v)^2$  del Laplaciano en  $A$  con condición homogénea en  $\partial A$  de Dirichlet para  $E_3$  y de Neumann para  $B_3$ . Si los operadores descriptos no tienen autovalores en común entonces estamos forzados a considerar modos TE o TM puros. Por lo tanto, con los resultados descriptos tenemos:

1. Caso TM. Para cada autovalor  $-\gamma^2$  del Laplaciano en  $A$  con condición de Dirichlet homogénea en  $\partial A$  y cada autofunción  $\psi$  correspondiente a ese autovalor

$$\Delta^\perp \psi = -\gamma^2 \psi, \quad \psi|_{\partial A} = 0;$$

hay infinitas ondas (tipo TM) cuyas frecuencias angulares son

$$\omega_{\gamma,n} := v\sqrt{\gamma^2 + (n\pi/d)^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Los campos complejos correspondientes son

$$\tilde{\mathbf{E}} = e^{-i\omega_{\gamma,n}t} [i\mathbf{E}^\perp \sin(n\pi z/d) + E_3 \hat{\mathbf{z}} \cos(n\pi z/d)], \quad \tilde{\mathbf{B}} = e^{-i\omega_{\gamma,n}t} \mathbf{B} \cos(n\pi z/d).$$

con

$$E_3 = \psi, \quad \mathbf{E}^\perp = ik_n \gamma^{-2} \nabla \psi \quad \& \quad \mathbf{B} = \frac{i\omega_{\gamma,n}}{\gamma^2 v^2} (\hat{\mathbf{z}} \wedge \nabla \psi).$$

2. Caso TE. Para cada autovalor  $-\gamma^2$  del Laplaciano en  $A$  con condición de Neumann homogénea en  $\partial A$  y cada autofunción  $\psi$  correspondiente a ese autovalor

$$\Delta^\perp \psi = -\gamma^2 \psi, \quad (\mathbf{n} \cdot \nabla \psi)|_{\partial A} = 0;$$

hay infinitas ondas (tipo TE) cuyas frecuencias angulares son

$$\omega_{\gamma,n} := v\sqrt{\gamma^2 + (n\pi/d)^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

dadas por

$$\tilde{\mathbf{E}} = e^{-i\omega_{\gamma,n}t} i\mathbf{E} \sin(n\pi z/d), \quad \tilde{\mathbf{B}} = e^{-i\omega_{\gamma,n}t} [\mathbf{B}^\perp \cos(n\pi z/d) + iB_3 \hat{\mathbf{z}} \sin(n\pi z/d)].$$

con

$$B_3 = \psi, \quad \mathbf{B}^\perp = ik_n \gamma^{-2} \nabla \psi \quad \& \quad \mathbf{E} = \frac{-i\omega_{\gamma,n}}{\gamma^2} (\hat{\mathbf{z}} \wedge \nabla \psi).$$

### Algunos comentarios:

- Obsérvese que –en ambos casos– a un dado autovalor (fijo) que no es simple hay un número finito ( $\geq 2$ ) de autofunciones linealmente independientes y que cualquier combinación lineal  $\psi$  de estas genera infinitas ondas del tipo correspondiente con frecuencias angulares independientes de  $\psi$ .
- ¿Como son los campos reales? Como ejemplo: en el caso TM cuando el autovalor (de Dirichlet) es simple hay una autofunción  $\psi$  real. Los campos generales son entonces

$$\Re(\tilde{\mathbf{E}}) = [\alpha \cos(\omega_{\gamma,n}t) + \beta \sin(\omega_{\gamma,n}t)] \left\{ \frac{-k_n}{\gamma^2} \sin(k_n z) \nabla \psi + \cos(k_n z) \psi \hat{\mathbf{z}} \right\},$$

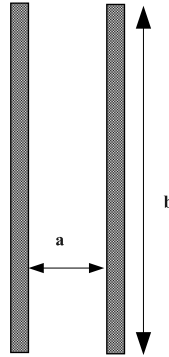
$$\Re(\tilde{\mathbf{B}}) = \frac{\omega_{\gamma,n}}{\gamma^2 v^2} [\alpha \sin(\omega_{\gamma,n} t) - \beta \cos(\omega_{\gamma,n} t)] \cos(k_n z) (\hat{\mathbf{z}} \wedge \nabla \psi) ,$$

con amplitudes reales  $\alpha, \beta$  arbitrarias. Estos campos son ambos (superposición de) ondas “estacionarias” (standing waves) pues la dependencia temporal factoriza y están desfasadas entre si en  $\pi/2$ .

### Algunos problemas

La discusión y solución de problemas de guías –o cavidades– con sección circular o rectangular se encuentran en cualquier libro de electrodinámica. Aquí discutimos algunos problemas un poco más complicados.

**Problema 1:** Una línea de transmisión consiste de dos láminas idénticas de metal, cuya sección se muestra en la figura. Suponiendo que  $b \gg a$ , discuta la propagación de un modo TEM por esta línea.



¿Que es un modo TEM? Se trata de una solución de las ec. de Maxwell para la cual hay una dirección de propagación  $\mathbf{k}$  tal que la dependencia temporal de tanto  $\mathbf{E}$  como de  $\mathbf{B}$  está dada por  $\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)$  con frecuencia angular  $\omega$  y fase  $\phi$ ; además, ambos campos son transversales a la dirección de propagación:  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$ .

Trabajamos en un sistema de coordenadas cartesiano tal que las láminas son perpendiculares al plano  $(x, y)$ , paralelas al eje “ $y$ ” y están ubicadas en  $x = \pm a/2$ . La dirección de propagación es entonces  $\pm \hat{\mathbf{z}}$ . La transversalidad es equivalente a  $E_3 = B_3 \equiv 0$ . El Ansatz es entonces

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{E}} e^{ikz - \omega t} , \quad \mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}} e^{ikz - \omega t} , \quad |k|c = \omega ,$$

donde tanto  $\hat{\mathbf{E}}$  como  $\hat{\mathbf{B}}$  son vectores complejos cuya tercera componente es nula y son además campos independientes de  $z$ ; vale decir campos que dependen solamente de  $(x, y)$ .

En las láminas tomamos las condiciones de borde usuales suponiendo que son conductores perfectos de modo que la componente de  $\mathbf{E}$  paralela a la superficie de la interfase se anula mientras que la componente de  $\mathbf{B}$  perpendicular a la superficie se anula. Por la transversalidad,

$$(22) \quad \hat{E}_2(\pm a/2, y) = \hat{B}_1(\pm a/2, y) = 0 .$$

Hay una solución inmediata:

$$(23) \quad \boxed{\widehat{\mathbf{E}} = \mathcal{E} \hat{\mathbf{x}} , \quad \widehat{\mathbf{B}} = \frac{k}{\omega} \hat{\mathbf{z}} \wedge \widehat{\mathbf{E}} = c^{-1} \mathcal{E} \hat{\mathbf{y}} .}$$

Veamos si hay otras soluciones. Con el Ansatz en las ec. de Maxwell dinámicas obtenemos

$$(24) \quad \frac{\partial \widehat{E}_2}{\partial x} - \frac{\partial \widehat{E}_1}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \widehat{B}_2}{\partial x} - \frac{\partial \widehat{B}_1}{\partial y} = 0$$

$$(25) \quad -\widehat{E}_2 = c \widehat{B}_1 \quad , \quad c \widehat{B}_2 = \widehat{E}_1$$

Usando (25) para expresar  $\widehat{\mathbf{E}}$  en términos de  $\widehat{\mathbf{B}}$ , obtenemos que (24) es:

$$(26) \quad \frac{\partial \widehat{B}_1}{\partial x} = -\frac{\partial \widehat{B}_2}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial \widehat{B}_2}{\partial x} = \frac{\partial \widehat{B}_1}{\partial y} .$$

Estas son las ec. de Cauchy-Riemann para la función analítica  $\widehat{B}_1 - i \widehat{B}_2$ . Por lo tanto  $(\widehat{B}_1, -\widehat{B}_2)$  es un par de armónicas conjugadas<sup>4</sup>. La ec. de vínculo  $\text{div}(\widehat{\mathbf{B}}) = 0$  es entonces automática. En virtud de la relación (25) las dos condiciones de borde (22) son equivalentes.

La condición  $b \gg a$  puede interpretarse de dos maneras por lo menos. Una –la más natural– es que hay invarianza translacional (aproximada) en la dirección  $\hat{\mathbf{y}}$ . La otra es que los campos son libres en  $y = \pm b/2$ . En el primer caso, los campos no dependen de la coordenada  $y$  y, en tal caso, las ec. (26) y (25) implican que los campos son constantes. La condición de borde (22) nos lleva a los campos (23).

En el segundo caso, si consideramos dependencia de  $(x, y)$ , atacamos la determinación de la función armónica  $\widehat{B}_1$  con el método de separación de variables y, con la condición de contorno (22), obtenemos

$$\widehat{B}_1(x, y) = \sum_{n \geq 1} [\alpha_n \cosh(n\pi y/a) + \beta_n \sinh(2n\pi y/a)] \sin\left(\frac{n\pi}{a}(x + a/2)\right) ,$$

con constantes complejas arbitrarias (pero claro, la serie deberá ser convergente)  $\alpha_n, \beta_n$  ( $n \geq 1$ ). Con esto, la integración de las ec. de Cauchy-Riemann (26) nos entrega

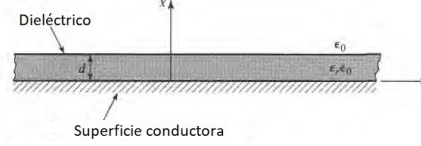
$$\widehat{B}_2(x, y) = - \sum_{n \geq 0} [\alpha_n \sinh(n\pi y/a) + \beta_n \cosh(2n\pi y/a)] \cos\left(\frac{n\pi}{a}(x + a/2)\right) ,$$

con  $\alpha_0$  arbitraria. El campo  $\widehat{\mathbf{E}}$  queda determinado por (25). Estos campos crecen exponencialmente en la dirección  $y$ ; en  $y = \pm b/2$ , ambos campos son (aproximadamente) proporcionales a  $e^{n\pi b/(2a)}$  que es enorme para  $n \geq 1$  cuando  $b \gg a$ .

La solución (23) se obtiene cuando  $\alpha_n = \beta_n = 0$  para todo  $n \geq 1$  pero  $\alpha_0 \neq 0$ .

**Problema 2:** Una capa dieléctrica con constante relativa  $\epsilon_r > 1$ , de espesor  $d$  y largo y ancho infinitos se encuentra apoyada sobre una superficie conductora perfecta. Por encima de la capa se encuentra vacío. Se desea estudiar modos TE de ondas electromagnéticas de energía finita de frecuencia  $\omega$  que no tienen dependencia funcional en la coordenada  $y$  y que se propagan solo a lo largo del eje  $z$ .

<sup>4</sup>Eliminando  $\widehat{\mathbf{B}}$  en vez de  $\widehat{\mathbf{E}}$ , obtenemos las ec. de Cauchy-Riemann para la función analítica  $\widehat{E}_1 - i \widehat{E}_2$ .



1. Escriba las ecuaciones que satisfacen los campos.
2. Escribir las condiciones de contorno asociadas.
3. Determine las relaciones que deben satisfacer las frecuencias de corte asociadas.
4. Escriba las componentes de los campos correspondientes.

Trabajamos en un sistema de coordenadas cartesianas como el de la figura donde  $x = 0$  corresponde al plano conductor y  $x = d$  a la interfase dieléctrico/vacio.

1. Planteamos campos TE dados por  $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}e^{i(kz-\omega)t}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}} = (\mathbf{B}^\perp + \psi\hat{\mathbf{z}})e^{i(kz-\omega)t}$  en el dieléctrico ( $0 \leq x \leq d$ ) con  $\psi$  una función de  $x \in [0, d]$  que satisface la ec. de Helmholtz

$$(27) \quad \psi'' + \underbrace{[(\omega/v)^2 - k^2]}_{=\gamma^2} \psi = 0, \quad \psi'(0) = 0,$$

y

$$\mathbf{B}^\perp = ik\gamma^{-2}\nabla\psi = ik\gamma^{-2}\psi' \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}^\perp = -i\omega\gamma^{-2}\hat{\mathbf{z}} \wedge (\nabla\psi) = -i\omega\gamma^{-2}\psi' \hat{\mathbf{y}}.$$

Aquí la velocidad de propagación de la onda monocromática de frecuencia angular  $\omega$  es  $v = 1/\sqrt{\mu_o\epsilon} = c/\sqrt{\epsilon_r}$  suponiendo que las permeabilidades magnéticas de los medios son iguales; y

$$(\omega/v)^2 = \epsilon_r(\omega/c)^2 > k^2.$$

En el vacío, ya teniendo en cuenta parcialmente la condición de empalme en la interfase en cuanto a la dependencia temporal y en la dirección de propagación, planteo campos TE dados por  $\tilde{\mathbf{E}}^{(o)} = \mathbf{E}^{(o)}e^{i(kz-\omega)t}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}^{(o)} = ((\mathbf{B}^{(o)})^\perp + \phi\hat{\mathbf{z}})e^{i(kz-\omega)t}$  donde  $\phi$  es una función de  $x \in [d, \infty)$  que satisface la ec. de Helmholtz

$$(28) \quad \phi'' + \underbrace{[(\omega/c)^2 - k^2]}_{\eta} \phi = 0,$$

y

$$(\mathbf{B}^{(o)})^\perp = ik\eta^{-1}\nabla\phi = ik\eta^{-1}\phi' \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{E}^{(o)} = (\mathbf{E}^{(o)})^\perp = -i\omega\eta^{-1}\hat{\mathbf{z}} \wedge (\nabla\phi) = -i\omega\eta^{-1}\phi' \hat{\mathbf{y}}.$$

Aquí la velocidad de propagación es  $c = \sqrt{1/\mu_o\epsilon_o}$ .

2. Las condiciones de contorno en el plano conductor  $x = 0$  son (19) y ya están incorporadas en el par  $(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{B}})$ . En la interfase  $x = d$ , se debe tener:

$$0 = \hat{\mathbf{x}} \cdot (\epsilon_o\tilde{\mathbf{E}}^{(o)} - \epsilon\tilde{\mathbf{E}})(d, y, z) \propto \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}},$$

$$\mathbf{0} = \hat{\mathbf{x}} \wedge (\tilde{\mathbf{E}}^{(o)} - \tilde{\mathbf{E}})(d, y, z) \propto i\omega(\gamma^{-2}\psi'(d) - \eta^{-1}\phi'(d))\hat{\mathbf{z}},$$

$$0 = \hat{\mathbf{x}} \cdot (\tilde{\mathbf{B}}^{(o)} - \tilde{\mathbf{B}})(d, y, z) \propto ik (\eta^{-1}\phi'(d) - \gamma^{-2}\psi'(d)) ,$$

y (siempre suponiendo que las permeabilidades magnéticas de los medios son iguales)

$$\mathbf{0} = \hat{\mathbf{x}} \wedge (\tilde{\mathbf{B}}^{(o)} - \tilde{\mathbf{B}})(d, y, z) \propto (\psi(d) - \phi(d))\hat{\mathbf{y}} .$$

O sea que las condiciones de empalme en la interfase se reducen a:

$$(29) \quad \psi(d) - \phi(d) = 0 , \quad \eta^{-1}\phi'(d) - \gamma^{-2}\psi'(d) .$$

3. Resolvemos los problemas (27,28) con la condición de empalme (29). Obtenemos inmediatamente

$$\psi(x) = a \cos(\gamma x) .$$

Suponemos  $\eta < 0$ , de modo que

$$\phi(x) = be^{-\sqrt{|\eta|}(x-d)} ,$$

rechazando la solución que crece exponencialmente en el vacío con la distancia  $x - d$  a la interfase. En tal caso,

$$(30) \quad \boxed{\epsilon_r(\omega/c)^2 > k^2 > (\omega/c)^2} ,$$

es la condición que debe cumplir el par  $(\omega, k)$ . Además, con

$$\begin{aligned} \eta &= -\gamma_o^2 , \quad \gamma_o > 0 , \\ \gamma^2 + \gamma_o^2 &= (\omega/c)^2(\epsilon_r - 1) . \end{aligned}$$

La existencia de constantes  $a, b$  tales que se cumpla (29) es

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\gamma d) & -1 \\ \gamma^{-1} \text{sen}(\gamma d) & \gamma_o^{-1} \end{pmatrix} = \gamma_o^{-1} \cos(\gamma d) + \gamma^{-1} \text{sen}(\gamma d) = 0 ;$$

vale decir

$$(31) \quad \gamma_o \tan(\gamma d) = -\gamma , \quad \gamma_o^2 = (\omega/c)^2(\epsilon_r - 1) - \gamma^2 .$$

En variables adimensionales

$$\xi := \gamma d , \quad \rho := (\omega d/c)\sqrt{\epsilon_r - 1} ,$$

la ecuación trascendente es

$$\boxed{-\tan(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{\rho^2 - \xi^2}} , \quad 0 < \xi < \rho} ;$$

que admite solución si y sólo si<sup>5</sup>  $\rho > \pi/2$  que es equivalente a

$$\boxed{\omega > \frac{\pi c}{2d\sqrt{\epsilon_r - 1}} =: \omega_c} .$$

<sup>5</sup>La función  $f(\xi) = \xi(\rho^2 - \xi^2)^{-1/2}$ ,  $0 \leq \xi < \rho$  es no-negativa, estrictamente creciente (ya que  $f'(\xi) = \rho^2(\rho^2 - \xi^2)^{-3/2} > 0$ ),  $f(0) = 0$  y  $\lim_{\xi \rightarrow \rho^-} f(\xi) = \infty$ . Si hay solución a  $\tan(\xi) = f(\xi)$  para  $0 < \xi < \rho$ , entonces  $(k + (1/2))\pi < \xi < (k + 1)\pi$  con  $k = 0, 1, \dots$  ya que en esos intervalos la tangente es negativa. De esto se desprende que  $\rho > \pi/2$ . Además, si  $2k + 1 < 2\rho/\pi < 2k + 3$  para algún  $k = 0, 1, 2, \dots$ , hay exactamente  $k + 1$  soluciones.

$\omega_c$  es la frecuencia de corte y para frecuencias superiores, cualquier número de onda  $k$  que cumpla con (30) es posible. Si queremos que el sistema soporte una única onda TE como descripta debemos pedir que  $\omega < 3\pi c/(2d\sqrt{\epsilon_r - 1})$ . El vector de Poynting  $\mathbf{S}^{(o)} = (\mathbf{E}^{(o)} \wedge \overline{\mathbf{H}^{(o)}})/2$ , que describe el flujo de energía promediado sobre un ciclo en el medio vacío, resulta proporcional a  $\exp(-2\gamma_o(x - d))$  y por ende el flujo decae exponencialmente con la distancia a la interfase.

Si  $\eta \geq 0$  entonces la densidad de energía local no decae a cero cuando nos alejamos de la interfase en el medio vacío. O también, el vector de Poynting  $\mathbf{S}^{(o)} = (\mathbf{E}^{(o)} \wedge \overline{\mathbf{H}^{(o)}})/2$  no decae a cero cuando nos alejamos de la interfase.

Para completar analizamos la factibilidad de otro tipo de solución. Si en la ec. de Helmholtz para el dieléctrico (27) suponemos que  $(\omega/v)^2 < k^2$ , o sea redefiniendo  $\gamma_1 = \sqrt{k^2 - (\omega/v)^2} > 0$ ,

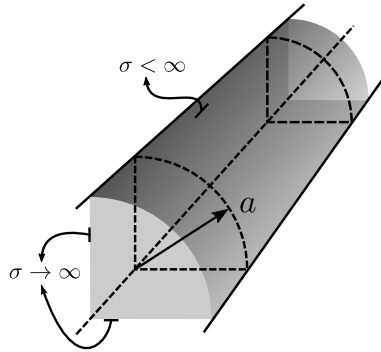
$$\psi'' - \gamma_1^2 \psi = 0, \quad \psi'(0) = 0;$$

obtenemos

$$\psi(x) = a \cosh(\gamma_1 x).$$

Todo sigue como antes y se obtienen las ec. (29) con  $\gamma^2$  reemplazado por  $-\gamma_1^2$ ; pero, la determinante de este sistema de ecuaciones lineales que determina a las constantes  $a, b$  es ahora  $\gamma_o^{-1} \cosh(\gamma_1 d) + \gamma_1^{-1} \sinh(\gamma_1 d)$  que es siempre positivo. La solución no trivial no existe cuando  $|k| > (\omega/v)$  y confirmamos que se satisface (30).

**Problema 3:** Considere una guía de ondas cilíndrica cuya sección toma la forma de un cuarto de círculo de radio  $a$  cerrado mediante dos segmentos perpendiculares de longitud  $a$ , como se indica en la figura:



1. Encuentre la expresión general de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  para modos de transmisión tipo TE. Suponga conductividad infinita para todo el conductor.
2. Determine la frecuencia fundamental de corte para este caso.
3. Para el modo fundamental hallado, calcule la potencia transmitida por la guía.
4. Suponiendo que el metal de la superficie circular tiene conductividad finita  $\sigma$ , mientras que las demás caras son superconductoras, encuentre la potencia disipada por unidad de longitud y el coeficiente de atenuación de la guía.

Usamos un sistema de coordenadas cilíndrico con eje coincidente con la arista formada por las dos caras planas y origen en uno de los extremos de la guía. Entonces el escenario de los acontecimientos es

$$\{(r, \varphi, z) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi/2, z \geq 0\} = A \times [0, \infty), \quad A = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}.$$

Recordamos la expresión para el gradiente en coordenadas cilíndricas

$$(32) \quad \nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + r^{-1} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}.$$

1. Los modos TE quedan determinados por las autofunciones  $\psi$  del problema de Neumann en  $A$

$$\Delta \psi = -\gamma^2 \psi \text{ en } A \text{ con } \mathbf{n} \cdot (\nabla \psi) = 0 \text{ en } \partial A.$$

Aquí ponemos de manifiesto en la notación el hecho (general) de que los autovalores del Laplaciano con condición de Neumann homogénea son no-positivos.

El Ansatz es  $\psi(r, \varphi) = R(r)X(\varphi)$  y las condiciones de contorno son

$$(33) \quad (\hat{\mathbf{r}} \cdot (\nabla \psi))(a, 0) = \frac{\partial \psi}{\partial r}(a, \varphi) = 0 \iff R'(a) = 0;$$

$$(34) \quad (-\hat{\mathbf{y}} \cdot (\nabla \psi))(r, 0) = -\frac{\partial \psi}{\partial y}(r, 0) = 0 \iff X'(0) = 0;$$

$$(35) \quad (-\hat{\mathbf{x}} \cdot (\nabla \psi))(r, \pi/2) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}(r, \pi/2) = 0 \iff X'(\pi/2) = 0.$$

En (34,35) hemos usado la regla de la cadena para expresar las derivadas “cartesianas” en términos de derivadas “cilíndricas”. El problema de Neumann es entonces

$$(36) \quad R'' + r^{-1}R - r^{-2}\lambda^2 R = -\gamma^2 R, \quad R(a) = 0;$$

$$(37) \quad X'' = -\lambda^2 X, \quad X'(0) = X'(\pi/2) = 0.$$

Nuevamente, sabemos a priori que los autovalores del problema de Neumann (37) son no-positivos. La solución de este problema es inmediata:  $\lambda = 2n$  y  $X(\varphi) = X_n(\varphi) := \cos(2n\varphi)$  con  $n \in \mathbb{N}$  (inclusive  $n = 0$ ). La ec. diferencial del problema (36) es entonces una ec. de Bessel cuya única solución regular es  $J_{2n}(\gamma r)$ . La condición de contorno de (36) implica que  $\gamma a$  es uno de los infinitos ceros no-negativos de  $J'_{2n}$ . Enumerándolos de menor a mayor  $\{\xi'_{2n,m} : m = 1, 2, 3, \dots\}$  obtenemos los autovalores y autofunciones

$$\gamma_{n,m}^2 := \left( \frac{\xi'_{2n,m}}{a} \right)^2, \quad \psi_{n,m}(r, \varphi) = J_{2n}(\xi'_{2n,m} r/a) \cos(2n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si  $\omega > \omega_{n,m}$  para algún  $n \in \mathbb{N}$  y algún  $m = 1, 2, 3, \dots$ , la guía tolera ondas TE de frecuencia  $\omega$  y número de onda

$$k = k_{nm}(\omega) := \sqrt{\mu\epsilon(\omega^2 - \omega_{n,m}^2)}, \quad \omega_{n,m} := \frac{\xi'_{2n,m}}{a\sqrt{\mu\epsilon}},$$



dadas por  $(\mathbf{E}_{n,m}e^{i(k_{n,m}z-\omega t)}, \mathbf{B}_{n,m}e^{i(k_{n,m}z-\omega t)})$  donde

$$(B_{n,m})_3 = \mathcal{B}\psi_{n,m}, \quad \mathbf{B}_{n,m}^\perp = i\frac{k_{n,m}}{\gamma_{n,m}^2}\mathcal{B}\nabla\psi_{n,m}, \quad \mathbf{E}_{n,m} = \mathbf{E}_{n,m}^\perp = -i\frac{\omega}{\gamma_{n,m}^2}\mathcal{B}[\hat{\mathbf{z}} \wedge \nabla\psi_{n,m}],$$

con  $\mathcal{B}$  una magnitud cuya dimensión es la del campo magnético ( $\psi$  es adimensional).

A dada frecuencia  $\omega > 0$  hay finitos  $(n, m)$  con  $\omega_{n,m} < \omega$  y una superposición arbitraria de los  $(\mathbf{E}_{n,m}, \mathbf{B}_{n,m})$  es una onda TE general.

2. La frecuencia de corte asociada con un modo  $(n, m)$  es  $\omega_{n,m}$  pues para está frecuencia (angular) el vector de onda  $k_{n,m}\hat{\mathbf{z}}$  se anula y no hay propagación. La frecuencia de corte más baja es entonces  $\min_{n,m}(\omega_{n,m})$  y esto es (se sabe que los ceros de las derivadas de las funciones de Bessel crecen con el orden y se entrelazan<sup>6</sup>, ver Abramowitz & Stegun; para los números ver tabla):

$$\omega_{2,1} = \frac{\xi'_{2,1}}{a\sqrt{\mu\epsilon}} \approx \frac{3,0542}{a\sqrt{\mu\epsilon}}.$$

3. Para el modo fundamental  $(1, 1)$ , la potencia por unidad de longitud y por ciclo es

$$P = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2 \sqrt{1 - (\omega_{11}/\omega)^2} \mu \mathcal{B}^2 \int_A \psi_{11}^2 d\sigma.$$

Con  $d\sigma = r dr d\varphi$  y  $\psi_{11} = J_2(\xi'_{21}r/a) |\cos(2\varphi)|$ , obtenemos

$$P = \frac{\pi a^2 \sqrt{\mu}}{8(\xi'_{21})^2 \sqrt{\epsilon}} \left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2 \sqrt{1 - (\omega_{11}/\omega)^2} \mathcal{B}^2 \int_0^{\xi'_{21}} x J_2(x)^2 dx.$$

La integral restante se conoce a partir de la fórmula de integración indefinida

$$\int x J_n(x)^2 dx = x^2(J_n(x)^2 - J_{n-1}(x)J_{n+1}(x))/2.$$

4. La perdida de potencia por unidad de longitud en un ciclo es (ver Jackson)

$$(dP/dz) = -\frac{a}{2\sigma\delta\mu^2} \int_0^{\pi/2} |\hat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B}(a, \varphi)|^2 d\varphi,$$

ya que no hay perdidas por las caras planas.

Para el modo fundamental  $(n = 1, m = 1)$ ,

$$\nabla\psi_{11} = (\xi'_{21}/a)J'_2(\xi'_{21}r/a) \cos(2\varphi) \hat{\mathbf{r}} - 2r^{-1} \sin(2\varphi) J_2(\xi_{21}r/a) \hat{\boldsymbol{\varphi}};$$

luego

$$\mathbf{B}_{11} = \mathcal{B}J_2(\xi'_{21})\{\cos(2\varphi) \hat{\mathbf{z}} - ik_{11}\gamma_{11}^{-2}(2/r) \sin(2\varphi) \hat{\boldsymbol{\varphi}}\} + \mathcal{B}(\xi'_{21}/a)J'_2(\xi'_{21}r/a) \cos(2\varphi) \hat{\mathbf{r}}$$

---

<sup>6</sup>  $\xi'_{nm} < \xi'_{(n+1)m}$ , además  $n \leq \xi'_{nm} < \xi_{nm} < \xi'_{n(m+1)} < \xi_{n(m+2)} < \xi'_{n(m+3)} \dots$

y por ende

$$(\hat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B}_{11})(a, \varphi) = \mathcal{B} J_2(\xi'_{21}) \{ \cos(2\varphi) \hat{\boldsymbol{\varphi}} + 2i(k_{11}/\gamma_{11}^2 a) \sin(2\varphi) \hat{\mathbf{z}} \},$$

de modo que

$$|(\hat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B}_{01})(a, \varphi)|^2 = \mathcal{B}^2 J_2(\xi'_{21})^2 \left( \cos(2\varphi)^2 + 4 \frac{k_{11}^2}{\gamma_{11}^4 a^2} \sin(2\varphi)^2 \right).$$

Entonces

$$(dP/dz) = -\frac{a\pi J_2(\xi'_{21})^2}{8\sigma\delta\mu^2} \mathcal{B}^2 \left( 1 + \left( \frac{2k_{11}}{\gamma_{11}^2 a} \right)^2 \right).$$

El coeficiente de atenuación es

$$\beta := -\frac{dP/dz}{2P}.$$

De modo que para el modo fundamental (1, 1) tenemos:

$$\beta = \frac{(J_2(\xi'_{21}))^2}{\sigma\delta a^3 \omega \mu^3 \sqrt{\mu\epsilon}} \frac{((\xi'_{21})^4 + 4k_{11}^2 a^2)}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{21}^2} \int_0^{\xi'_{21}} x J_2(x)^2 dx}.$$

**Problema 4:** Una onda TM axialmente simétrica se propaga en una guía de ondas circular de radio  $b$  la cual está parcialmente llena con un dieléctrico. El dieléctrico tiene constante dieléctrica  $\epsilon$  y ocupa la región  $a \leq r \leq b$ .

(a) Encuentre la solución general del problema y planteé las condiciones de contorno.

(b) Encuentre la relación (ecuación trascendente) entre el vector de onda  $\mathbf{k}$  que caracteriza la propagación de la onda a lo largo de la guía y la frecuencia de la misma.

(c) Calcule la velocidad de fase cuando el dieléctrico llena la guía.

Planteamos ondas TM en cada medio pero con el mismo patrón de desplazamiento dado por  $(k, \omega)$ . Usamos el índice 1 (res[p. 2] para el vacío (resap. dieléctrico) y trabajamos en coordenadas cilíndricas naturales  $(r, \varphi, z)$ .  $\perp$  denota la parte perpendicular a  $\hat{\mathbf{z}}$ . El Ansatz es entonces

$$\mathbf{E}'_j = \mathbf{E}_j e^{ikz - \omega t}, \quad \mathbf{B}'_j = \mathbf{B}_j e^{ikz - \omega t}, \quad j = 1, 2,$$

donde los campos  $\mathbf{E}_j$  y  $\mathbf{B}_j$  dependen solamente de las variables  $(r, \varphi)$  (con  $r$  restringido al intervalo que corresponda) y –por la transversalidad del campo magnético–

$$(38) \quad B_{j,z} = 0, \quad j = 1, 2.$$

Además, buscamos campos **axialmente simétricos** con lo cual  $E_j, B_j$  no dependen de la variable  $\varphi$ . Las condiciones de empalme en la interfase ( $r = a$ ) son (no hay dependencia de  $\varphi$  y suponemos que  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_o$ ):

$$(39) \quad \epsilon_o E_{1,r}(a) = \epsilon_2 E_{2,r}(a), \quad \mathbf{E}_1^\perp(a) = \mathbf{E}_2^\perp(a); \quad B_{1,r}(a) = B_{2,r}(a), \quad \mathbf{B}_1^\perp(a) = \mathbf{B}_2^\perp(a).$$

También, en  $r = b$ ,

$$(40) \quad E_{2,z}(b) = 0.$$

De las ec. de Maxwell obtenemos

$$E_{j,z} = \Psi_j, \quad j = 1, 2,$$

donde  $\Delta\Psi_j + \gamma_j^2\Psi_j = 0$ , con condiciones de borde pertinentes. Ya que  $\Psi_j$  no depende de  $\varphi$ , las ec. de Helmholtz se reducen a la ec. diferencial ordinaria

$$(41) \quad r^2\Psi_j'' + r\Psi_j' + (\gamma_j r)^2\Psi_j = 0$$

que es una ec. de Bessel de orden cero cuyas soluciones linealmente independientes en cualquier intervalo abierto que no contenga el punto  $r = 0$  son  $J_o(\gamma_j r)$  y  $Y_o(\gamma_j r)$ . Imponiendo regularidad de las soluciones

$$\begin{aligned} \Psi_1(r) &= \alpha_1 J_o(\gamma_1 r), \quad 0 \leq r \leq a; \\ \Psi_2(r) &= \alpha_2 J_o(\gamma_2 r) + \beta_2 Y_o(\gamma_2 r), \quad a \leq r \leq b. \end{aligned}$$

Las partes transversales de los campos están determinadas por

$$\mathbf{E}_j^\perp = ik\gamma_j^{-2}\nabla\Psi_j, \quad \mathbf{B}_j = \mathbf{B}_j^\perp = i\omega(c_j\gamma_j)^{-2}(\hat{\mathbf{z}} \wedge \nabla\Psi_j),$$

donde  $c_j = (\mu_j\epsilon_j)^{-1/2}$  es la velocidad de propagación. Entonces,  $c_1 = c$  y  $c_2 = c/\sqrt{\epsilon}$  donde  $\epsilon := \epsilon_2/\epsilon_o (> 1)$  es la constante dieléctrica (del dieléctrico).

Con  $\nabla = \hat{\mathbf{r}}(\partial/\partial r) + r^{-1}\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\partial/\partial\varphi)$ , y  $\hat{\mathbf{z}} \wedge \hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ , obtenemos:

$$\mathbf{E}_1^\perp = i(k/\gamma_1)J_o'(\gamma_1 r)\alpha_1\hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{B}_1^\perp = ic^{-2}(\omega/\gamma_1)J_o'(\gamma_1 r)\alpha_1\hat{\boldsymbol{\varphi}},$$

$$\mathbf{E}_2^\perp = i(k/\gamma_2)[J_o'(\gamma_2 r)\alpha_2 + Y_o'(\gamma_2 r)\beta_2]\hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{B}_2^\perp = i\epsilon c^{-2}(\omega/\gamma_1)[J_o'(\gamma_2 r)\alpha_2 + Y_o'(\gamma_2 r)\beta_2]\hat{\boldsymbol{\varphi}}.$$

Podemos ahora especificar las condiciones de borde. La condición (40) nos dice que:

$$(42) \quad 0 = \Psi_2(b) = J_o(\gamma_2 b)\alpha_2 + Y_o(\gamma_2 b)\beta_2.$$

De las condiciones (39) para el empalme del campo eléctrico en  $r = a$ , obtenemos

$$(43) \quad \epsilon_o \frac{k}{\gamma_1} J_o'(\gamma_1 a)\alpha_1 = \epsilon_o \epsilon \frac{k}{\gamma_2} [J_o'(\gamma_2 a)\alpha_2 + Y_o'(\gamma_2 a)\beta_2], \quad J_o(\gamma_2 a)\alpha_1 = J_o(\gamma_2 a)\alpha_2 + Y_o(\gamma_2 a)\beta_2.$$

Y, de las condiciones de empalme del campo magnético en  $r = a$  (una de las cuales es trivial dado que  $B_{1,r} = B_{2,r} = 0$ ), usando (38),

$$(44) \quad \frac{\omega}{c^2\gamma_1} J_o'(\gamma_1 a)\alpha_1 = \epsilon \frac{\omega}{c^2\gamma_2} [J_o'(\gamma_2 a)\alpha_2 + Y_o'(\gamma_2 a)\beta_2].$$

Esta última ecuación es equivalente a la primera relación de (43). Por lo tanto, las tres constantes incógnitas  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\beta_2$  están determinadas por las tres ecuaciones (42 & 43) que son lineales en las incógnitas. La matriz asociada con este sistema es

$$M := \begin{pmatrix} 0 & J_o(\gamma_2 b) & Y_o(\gamma_2 b) \\ -J_o'(\gamma_1 a)/\gamma_1 & \epsilon J_o'(\gamma_2 a)/\gamma_2 & \epsilon Y_o'(\gamma_2 a)/\gamma_2 \\ J_o(\gamma_1 a) & -J_o(\gamma_2 a) & -Y_o(\gamma_2 a) \end{pmatrix}.$$

con determinante correspondiente igual a

$$\frac{1}{\gamma_1\gamma_2} \{ \epsilon\gamma_1 J_o(\gamma_1 a)[J_o(\gamma_2 b)Y_o'(\gamma_2 a) - Y_o(\gamma_2 b)J_o'(\gamma_2 a)] \}$$

$$+\gamma_2 J'_o(\gamma_1 a)[Y_o(\gamma_2 b)J_o(\gamma_2 a) - J_o(\gamma_2 b)Y_o(\gamma_2 a)]\} .$$

Para que el trio de constantes no sea trivial es necesario y suficiente que la determinante se anule; o sea:

$$\epsilon\gamma_1 J_o(\gamma_1 a)[J_o(\gamma_2 b)Y'_o(\gamma_2 a) - Y_o(\gamma_2 b)J'_o(\gamma_2 a)] = \gamma_2 J'_o(\gamma_1 a)[J_o(\gamma_2 b)Y_o(\gamma_2 a) - Y_o(\gamma_2 b)J_o(\gamma_2 a)].$$

Con las relaciones  $J'_o = -J_1$  y  $Y'_o = -Y_1$ , podemos reescribir esto como

$$(45) \quad D_o = 0 ,$$

donde

$$(46) \quad \begin{aligned} D_o(\gamma_1, \gamma_2) := & \epsilon\gamma_1 J_o(\gamma_1 a)[Y_o(\gamma_2 b)J_1(\gamma_2 a) - J_o(\gamma_2 b)Y_1(\gamma_2 a)] \\ & - \gamma_2 J_1(\gamma_1 a)[Y_o(\gamma_2 b)J_o(\gamma_2 a) - J_o(\gamma_2 b)Y_o(\gamma_2 a)] . \end{aligned}$$

Pero,  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  no son independientes. La frecuencia, el número de onda y las constantes (autovalores) de la ec. de Bessel (41) están conectados por

$$(47) \quad (\omega/c)^2 = \gamma_1^2 + k^2 , \quad (\omega/c)^2 = \frac{\gamma_2^2 + k^2}{\epsilon} .$$

Vía (47) podemos eliminar una de las dos constantes  $\gamma_1, \gamma_2$  para expresar a (45) como –por ejemplo–  $0 = D(\gamma_1, k) := D_o(\gamma_1, \gamma_2(\gamma_1, k))$  o bien como  $0 = D(\gamma_1, \omega) := D_o(\gamma_1, \gamma_2(\gamma_1, \omega))$ . Alternativamente, de

$$\gamma_1 = \sqrt{(\omega/c)^2 - k^2} , \quad \gamma_2 = \sqrt{\epsilon(\omega/c)^2 - k^2} , \quad \omega > ck ,$$

podemos expresar a (45) como

$$0 = D(\omega, k) := D_o(\gamma_1(\omega, k), \gamma_2(\omega, k)) ,$$

que nos dará (directamente) implícitamente la curva de dispersión  $0 < k \mapsto \omega(k)$  -teniendo en cuenta que  $\omega(k) > ck$ .

Primer Comentario: En términos de las variables adimensionales

$$\Omega := (a\omega/c) , \quad \xi := ak , \quad \lambda := b/a ,$$

la relación  $D(\omega, k) = 0$  es

$$\begin{aligned} & \epsilon\sqrt{\Omega^2 - \xi^2} J_0(\sqrt{\Omega^2 - \xi^2}) \left[ Y_0(\lambda\sqrt{\epsilon\Omega^2 - \xi^2})J_1(\sqrt{\epsilon\Omega^2 - \xi^2}) - J_0(\lambda\sqrt{\epsilon\Omega^2 - \xi^2})Y_1(\sqrt{\epsilon\Omega^2 - \xi^2}) \right] \\ & = \sqrt{\epsilon\Omega^2 - \xi^2} J_1(\sqrt{\Omega^2 - \xi^2}) \left[ Y_0(\lambda\sqrt{\epsilon\Omega^2 - \xi^2})J_0(\sqrt{\epsilon\Omega^2 - \xi^2}) - J_0(\lambda\sqrt{\epsilon\Omega^2 - \xi^2})Y_0(\sqrt{\epsilon\Omega^2 - \xi^2}) \right] . \end{aligned}$$

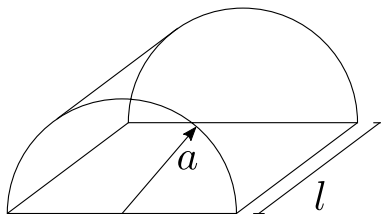
Segundo comentario: Si se relaja la condición de simetría axial, se obtiene que

$$\Psi_1(r, \varphi) = J_n[\gamma_1 R](\alpha_{1n} \cos(n\varphi) + \beta_{1n} \sin(n\varphi)) ,$$

$$\Psi_2(r, \varphi) = J_n[\gamma_1 R](\alpha_{2n} \cos(n\varphi) + \gamma_n \sin(n\varphi)) + Y_n[\gamma_1 R](\beta_{2n} \cos(n\varphi) + \delta_n \sin(n\varphi)) ,$$

con  $n = 0, 1, \dots$ .

**Problema 5:** *Un cavidad resonante es construida mediante tapas sobre un cilindro semicircular de longitud  $l$  y radio  $a$  como se muestra en la figura, con  $l > 2a$ . Encuentre el modo de resonancia fundamental TM suponiendo que el material de la cavidad es un excelente conductor. Calcule a continuación la potencia disipada sobre la cara semi-cilíndrica de la cavidad si se asume que el metal de dicha pared tiene una conductividad  $\sigma$ .*



Aplicamos directamente las fórmulas obtenidas usando el sistema de coordenadas cilíndricas  $(\rho, \varphi, z)$  con eje  $\hat{z}$  coincidente con el eje del cilindro de modo que el semi-cilindro es

$$\{\rho \cos(\varphi)\hat{x} + \rho \sin(\varphi)\hat{y} + z\hat{z} : 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq z \leq \ell\},$$

con sección transversal

$$A := \{\rho \cos(\varphi)\hat{x} + \rho \sin(\varphi)\hat{y} : 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Estas fórmulas dicen que los campos asociados con cada modo  $(\gamma^2, p)$  son:

$$E_z = \mathcal{E}\psi \cos(p\pi z/\ell)e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{E}^\perp = -\mathcal{E} \frac{p\pi}{\ell\gamma^2} \sin(p\pi z/\ell)(\nabla\psi)e^{-i\omega t},$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^\perp = i\mathcal{E} \frac{\epsilon\omega}{\gamma^2} \cos(p\pi z/\ell)[\hat{z} \wedge (\nabla\psi)]e^{-i\omega t},$$

donde  $p = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\mathcal{E}$  es una amplitud con la dimensión del campo eléctrico ( $\psi$  es adimensional),

$$\omega^2 = \frac{1}{\mu\epsilon} \sqrt{\gamma^2 + (p\pi/\ell)^2},$$

donde  $-\gamma^2$  (resp.  $\psi$ ) es un autovalor (resp. autofunción) del problema de Dirichlet

$$(48) \quad \Delta\psi = -\gamma^2\psi, \quad \psi|_{\partial A} \equiv 0$$

en  $A$ .<sup>7</sup>

El problema (48) se resuelve con un Ansatz de separación de variables (coordenadas polares)  $\psi(\rho, \varphi) = R(\rho)X(\varphi)$  que -vía  $\Delta = (\partial^2/\partial\rho^2) + \rho^{-1}(\partial/\partial\rho) + \rho^{-2}(\partial^2/\partial\varphi^2)$ - conduce a

$$X'' = \lambda X, \quad X(0) = X(\pi) = 0,$$

$$\rho^2 R'' + \rho R' + (\gamma^2 \rho^2 - \lambda)R = 0, \quad R(a) = 0.$$

Entonces  $\lambda = -n^2$  con  $0 \neq n \in \mathbb{Z}$  y  $X_n(\varphi) = \sin(n\varphi)$ , de modo que la ec. radial es

$$\rho^2 R'' + \rho R' + [(\gamma\rho)^2 - n^2]R,$$

<sup>7</sup>Recordar aquí que los autovalores del laplaciano con condición de Dirichlet son siempre negativos.

la ec. de Bessel de orden  $n$  con solución regular en el origen  $J_n(\gamma\rho)$ . La condición de contorno implica que  $J_n(\gamma a) = 0$  o sea que  $\gamma a$  es uno de los infinitos ceros positivos de  $J_n$ . Por lo tanto, enumerando estos ceros de menor a mayor  $\{\xi_{n,m} : m = 1, 2, 3, \dots\}$ ,

$$\gamma = \gamma_{n,m} = \xi_{n,m}/a, \quad \omega^2 = \omega_{n,m,p}^2 = \frac{1}{\mu\epsilon}((\xi_{n,m}/a)^2 + (p\pi/\ell)^2),$$

y

$$\psi_{n,m}(\rho, \varphi) = J_n(\xi_{n,m}\rho/a) \sin(n\varphi),$$

siempre con  $n, m, p \in \{1, 2, 3, \dots\}$ .

Para determinar los campos necesito

$$\begin{aligned} \nabla\psi_{n,m} &= (\partial\psi_{n,m}/\partial\rho)\hat{\rho} + \rho^{-1}(\partial\psi_{n,m}/\partial\varphi)\hat{\varphi} = (\xi_{n,m}/a)J'_n(\xi_{n,m}\rho/a) \sin(n\varphi) \hat{\rho} + (n/\rho)J_n(\xi_{n,m}\rho/a) \cos(n\varphi) \hat{\varphi}; \\ \hat{z} \wedge \nabla\psi_{n,m} &= (\xi_{n,m}/a)J'_n(\xi_{n,m}\rho/a) \sin(n\varphi) \hat{\varphi} - (n/\rho)J_n(\xi_{n,m}\rho/a) \cos(n\varphi) \hat{\rho}. \end{aligned}$$

El lector podrá insertar esto en las expresiones para los campos.

Con nuestra enumeración creciente de los ceros de  $J_n$ , el modo de menor frecuencia angular es aquel con  $n = m = p = 1$  o sea

$$\omega_{1,1,1} = v \sqrt{(3,831705.. / a)^2 + (\pi/\ell)^2}; \quad v = \sqrt{1/\mu\epsilon};$$

este modo es no degenerado (i.e., autovalor simple).

La potencia disipada en un ciclo por el manto (sin tapas y sin base) es aproximadamente, según Jackson

$$P_o = \frac{a}{2\sigma\delta} \int_0^\pi d\varphi \int_0^\ell dz |\hat{\rho} \wedge \mathbf{H}(a, \varphi, z)|^2$$

donde  $\sigma$  es la conductividad y

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu_c}}$$

la distancia de penetración ( $\mu_c$  es la permeabilidad del conductor). Tenemos

$$|\hat{\rho} \wedge \mathbf{H}|^2 = \frac{\epsilon}{\mu} \mathcal{E}^2 (1 + (p\pi a/\ell \xi_{n,m})^2) \cos^2(p\pi z/\ell)^2 \sin^2(n\varphi)^2 J_n'^2(\xi_{n,m}\rho/a)^2,$$

y las integrales necesarias son:

$$\int_0^\ell \cos^2(p\pi z/\ell)^2 dz = \ell/2, \quad \int_0^\pi \sin^2(n\varphi)^2 d\varphi = \pi/2.$$

Con esto

$$P_o = \frac{\epsilon a \ell \pi}{8\sigma\delta_{n,m}\mu} \left( 1 + \left[ \frac{p\pi a}{\ell \xi_{n,m}} \right]^2 \right) \mathcal{E}^2 J_n'^2(\xi_{n,m})^2.$$

**Problema 6:** Una cavidad resonante cilíndrica de radio  $a$  está rellena con un dieléctrico inhomogeneo en la dirección  $z$  (dirección coincidente con el eje del cilindro). La permitividad eléctrica es  $\epsilon_1$ , si  $-c < z < 0$ , y  $\epsilon_2$  si  $0 < z < d$ . Encuentre el conjunto de ecuaciones trascendentales que permiten obtener las frecuencias de resonancia de los modos TM.

Los medios son

$$Z_1 = \{(r, \varphi, z) : 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -c < z < 0\},$$

$$Z_2 = \{(r, \varphi, z) : 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < z < d\}.$$

A la interfase común la denoto con  $I = \{(r, \varphi, 0) : 0 < r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ . Las ec. que determinan los modos TM en cada medio para  $\Psi_j(r, \varphi)$  son

$$\Delta \Psi_j = -\gamma_j^2 \Psi_j, \quad \Psi_j|_{\partial Z_j \setminus I} = 0.$$

Para cada  $\Psi_j$  los campos ( $\perp$  denota la componente perpendicular al eje del cilindro que es a su vez la componente paralela a la interfase  $I$ )

$$E_{jz}^\pm = \Psi_j \exp\{i(\pm k_j z - \omega t)\}, \quad (\mathbf{E}_j^\pm)^\perp = i \frac{k_j}{\gamma_j^2} (\nabla \Psi_j) \exp\{i(\pm k_j z - \omega t)\};$$

$$\mathbf{B}_j^\pm = (\mathbf{B}_j^\pm)^\perp = \frac{i\omega\mu\epsilon_j}{\gamma_j^2} (\hat{\mathbf{z}} \wedge (\nabla \Psi_j)) \exp\{i(\pm k_j z - \omega t)\};$$

satisfacen las ecuaciones de Maxwell sin fuentes si (suponiendo que las permeabilidades magnéticas de los medios son iguales)

$$(49) \quad \boxed{\mu\epsilon_j\omega^2 = \gamma_j^2 + k_j^2}.$$

Fijamos una frecuencia común  $\omega$  (a determinar) para ambos medios.

Las soluciones en variables separadas –y se puede ver que no hay otras– son

$$\Psi_j(r, \varphi) = J_n(\xi_{nm}r/a) \{a_j \cos(n\varphi) + b_j \sin(n\varphi)\}, \quad \gamma_j = \xi_{nm}/a$$

donde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $J_n$  es la función de Bessel de primera especie y orden  $n$ , y  $\{\xi_{nm} : m = 1, 2, 3, \dots\}$  son los ceros positivos de  $J_n$  enumerados de menor a mayor.

Si bien podemos tomar pares  $(n, m)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \{1, 2, 3, \dots\}$ ) distintos para cada medio<sup>8</sup>, nos conformamos con un par común para ambos medios y usamos

$$(50) \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma := \gamma_{nm}, \quad (n, m) \text{ fijo}.$$

Para obtener ondas estacionarias –que cumplan con las condiciones en la interfase  $I$ – superponemos en cada medio ondas con  $+k_j$  y  $-k_j$  de modo que planteamos campos  $\mathbf{E}_j = \alpha_j \mathbf{E}_j^+ + \beta_j \mathbf{E}_j^-$  y  $\mathbf{B}_j = \alpha_j \mathbf{B}_j^+ + \beta_j \mathbf{B}_j^-$  con constantes complejas  $\alpha_j, \beta_j$ . Pasando a la representación en términos de seno y coseno, y teniendo en cuenta los intervalos de variabilidad de  $z$  para cada medio, la dependencia explicita de  $z$  está dada por

$$f_j(z) = \{c_j \cos(k_j z) + d_j \sin(k_j z)\}, \quad z \text{ varía según corresponda en } Z_j,$$

con  $c_j, d_j$  constantes complejas. Y los campos son

$$(51) \quad E_{jz} = \Psi_j f_j(z) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{E}_j^\perp = \frac{1}{\gamma_j^2} (\nabla \Psi_j) f_j'(z) e^{-i\omega t};]$$

---

<sup>8</sup>Más sobre esto en comentarios finales.

$$(52) \quad \mathbf{B}_j = \mathbf{B}_j^\perp = \frac{i\omega\mu\epsilon_j}{\gamma^2} (\hat{\mathbf{z}} \wedge (\nabla\Psi_j)) f_j(z) e^{-i\omega t};$$

De las condiciones de borde en las tapas del cilindro que piden que se anulen los campos, obtenemos

$$f_1(-c) = 0, \quad f_2(d) = 0;$$

por lo tanto, obtenemos

$$(53) \quad f_1(z) = \sin(k_1(z+c)), \quad f_2(z) = \sin(k_2(z-d));$$

ya que eventuales multiplos constantes de estas funciones pueden tenerse en cuenta en los coeficientes  $(a_j, b_j)$  que determinan a  $\Psi_j$ . Los campos dados por (51,52) con las  $f_j$  explicitadas en (53) cumplen con las ec. de Maxwell y las condiciones de borde en  $\partial Z_j \setminus I$ . Sólo falta la interfase  $I$  donde: por continuidad de componentes normales a la superficie (o sea axiales) de  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{B}$

$$(54) \quad \epsilon_1 E_{1z}|_I = \epsilon_2 E_{2z}|_I, \quad B_{1z}|_I = B_{2z}|_I;$$

y por continuidad de componentes paralelas (o sea  $\perp$ ) a la superficie de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ , (recordando que las permeabilidades magnéticas de los medios son iguales)

$$(55) \quad \mathbf{E}_1^\perp|_I = \mathbf{E}_2^\perp|_I, \quad \mathbf{B}_1^\perp|_I = \mathbf{B}_2^\perp|_I.$$

La condición para el campo  $\mathbf{B}$  de (54) es automática; la condición para el campo eléctrico es

$$\epsilon_1 \Psi_1 \sin(k_1 c) = -\epsilon_2 \Psi_2 \sin(k_2 d).$$

De la independencia lineal (o de la ortogonalidad) de las funciones trigonométricas sin y cos del mismo argumento, obtenemos

$$(56) \quad \epsilon_1 \sin(k_1 c) a_1 = -\epsilon_2 \sin(k_2 d) a_2, \quad \epsilon_1 \sin(k_1 c) b_1 = -\epsilon_2 \sin(k_2 d) b_2.$$

La condición (55) para el campo eléctrico es:

$$(\nabla\Psi_1) k_1 \cos(k_1 c) = (\nabla\Psi_2) k_2 \cos(k_2 d).$$

Tomando las componentes radiales y azimutales de esta relación vemos que las dos condiciones obtenidas son idénticas y equivalentes a

$$(57) \quad k_1 \cos(k_1 c) a_1 = k_2 \cos(k_2 d) a_2, \quad k_1 \cos(k_1 c) b_1 = k_2 \cos(k_2 d) b_2.$$

La condición (55) sobre  $\mathbf{B}$  resulta idéntica a aquella ya obtenida para  $E_z$  de (54). Los pares de ecuaciones (56,57) para  $(a_1, a_2)$  y  $(b_1, b_2)$  son idénticos y corresponden a la matriz

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \sin(k_1 c) & \epsilon_2 \sin(k_2 d) \\ k_1 \cos(k_1 c) & -k_2 \cos(k_2 d) \end{pmatrix}$$

cuya determinante se anula si y sólo si

$$(58) \quad \boxed{\epsilon_1 k_2 \sin(k_1 c) \cos(k_2 d) = -\epsilon_2 k_1 \cos(k_1 c) \sin(k_2 d)}.$$



En resumen, fijado  $\gamma = \gamma_{nm}$ , la frecuencia queda determinada utilizando (49) para expresar a  $k_1, k_2$  en términos de  $\omega$  y luego encontrando los valores de  $\omega$  que satisfacen (58). Para cada uno de estos valores (y a priori no sabemos si hay uno, muchos o ninguno) obtenemos una onda estacionaria con esa frecuencia angular o sea un modo resonante de la cavidad. Tengase en cuenta que cada uno de estos “modos” es doblemente degenerado en la medida que  $\Psi$  puede variar en un espacio bi-dimensional pues eligiendo  $(a_1, b_1)$  el par  $(a_2, b_2)$  queda determinado.

*Comentarios:*

1. *Modos espureos (e inestables)* Conservando la condición (50), podemos satisfacer (58) muy pero muy fácilmente. Por ejemplo con  $k_1 = \ell_1\pi/c$  y  $k_2 = \ell_2\pi/d$  donde  $\ell_1, \ell_2$  son enteros positivos. Pero la relación de dispersión (49) demanda entonces que el cero  $\xi_{nm}$  de la función de Bessel sea expresable en términos de las permitividades y los parámetros geométricos

$$\xi_{nm} = a \sqrt{\frac{\epsilon_1(\ell_2\pi/d)^2 - \epsilon_2(\ell_1\pi/c)^2}{\epsilon_2 - \epsilon_1}}.$$

Esto será, en general, imposible de satisfacer. Pero, además –cuando es posible– cualquier pequeñísimo cambio en los parámetros produce la desaparición del modo correspondiente. Estos modos son no sólo espureos sino inestables.

Lo mismo sucede si se anulan los cosenos en ambos miembros de (58) con  $k_1 = (2\ell_1 + 1)\pi/(2c)$  y  $k_2 = (2\ell_2 + 1)\pi/(2d)$ .

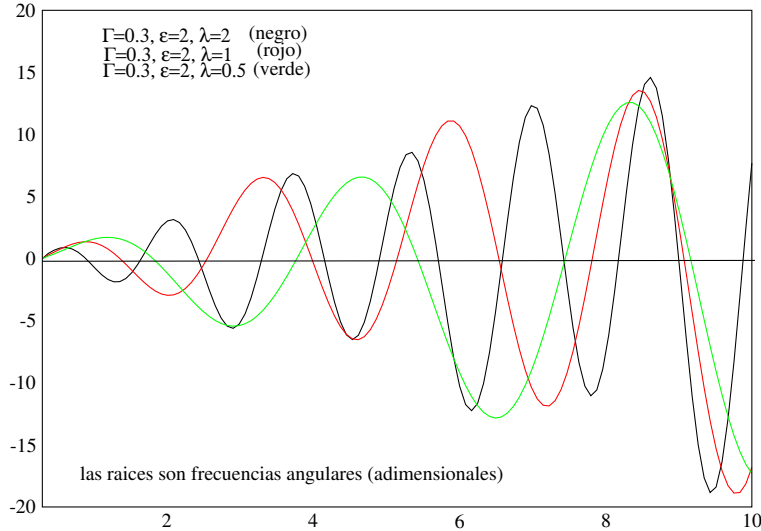
2. En términos de parámetros y variables adimensionales

$$\Omega := c\sqrt{\mu\epsilon_1}\omega, \quad \Gamma := c\gamma_{nm} = c\xi_{nm}/a, \quad \epsilon := \epsilon_2/\epsilon_1, \quad \lambda := d/c,$$

la ec. (58) es  $\Phi(\Omega) = 0$  donde

$$\begin{aligned} \Phi(\Omega) := & \sqrt{\epsilon\Omega^2 - \Gamma^2} \sin(\sqrt{\Omega^2 - \Gamma^2}) \cos(\lambda\sqrt{\epsilon\Omega^2 - \Gamma^2}) \\ & + \epsilon \sqrt{\Omega^2 - \Gamma^2} \sin(\lambda\sqrt{\epsilon\Omega^2 - \Gamma^2}) \cos(\sqrt{\Omega^2 - \Gamma^2}), \end{aligned}$$

con  $\Omega > \max\{\Gamma, \Gamma/\sqrt{\epsilon}\}$ . Descartando modos espureos, se obtienen infinitas “frecuencias”  $\Omega$ ; ver figura.



3. Volviendo ahora a (50); si abandono esta suposición tomando pares  $(n_j, m_j)$  distintos para  $\gamma_j = \xi_{n_j m_j}/a$ , las condiciones de borde

$$\epsilon_1 \Psi_1 \sin(k_1 c) = -\epsilon_2 \Psi_2 \sin(k_2 d) , \quad (\nabla \Psi_1) k_1 \cos(k_1 c) = (\nabla \Psi_2) k_2 \cos(k_2 d) ,$$

constituyen un sistema de tres ecuaciones lineales (pero con coeficientes dependientes del radio  $r$ ) para el par  $(a_1, a_2)$  (que son idénticas a aquellas para  $(b_1, b_2)$ ) que no admiten solución no trivial.

Los modos del b) son entonces los únicos no espureos y son claramente funciones continuas de los parámetros geométricos y de las permitividades.