Asintótica a tiempos grandes de la evolución de sistemas cuánticos abiertos.

Trabajo Especial de Licenciatura en Física o Matemática.

Resumen: Considere el álgebra $M_n(\mathbb{C})$ de matrices cuadradas $n \times n$ con entradas complejas provistas de su estructura algebraica natural: suma, producto, adjunta, etc. y la norma $\|a\| := \sup_{0\neq x\in\mathbb{C}^n} \|ax\|/\|x\|$ donde $\|x\|$ es la norma usual (ℓ_2) en $\mathbb{C}^n$ asociada al producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ canónico en $\mathbb{C}^n$. Decimos que una matriz b es positiva, anotando $b \geq 0$ si $\langle x, bx\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$. Dado un semigrupo $\{\alpha_t : t \geq 0\}$, i.e. $\alpha_t \circ \alpha_s = \alpha_{t+s}$, de mapas <u>lineales</u> $\alpha_t : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ que preservan la identidad $\mathbf{1} \in M_n(\mathbb{C})$, preservan adjuntos ($\alpha_t(a^*) = \alpha_t(a)^*$) y son además positivos ($\alpha_t(b) \geq 0$ si $b \geq 0$) la pregunta es: existe (1) una *-subálgebra $\mathcal{M}$ de $M_n(\mathbb{C})$; (2) una proyección lineal que preserva adjuntos $E : M_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}$ con $E(abc) = aE(b)c$ para $a, c \in \mathcal{M}$ y $b \in M_n(\mathbb{C})$; y un semigrupo $\{\delta_t : t \geq 0\}$ de *-automorfismos de $\mathcal{M}$ de modo que

$$\lim_{t\to\infty} \|\alpha_t(a) - \delta_t(E(a))\| = 0 \ , \quad \forall a \in M_n(\mathbb{C}) \ . \tag{1}$$

Plan de Trabajo

Se propone la problemática de la asintótica a tiempos largos de un semigrupo[1] $\{\alpha_t : t \geq 0\}$ de mapas $\alpha_t : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ de una W^*-álgebra con unidad (o más generalmente de una C^*-álgebra) $\mathcal{A}$ que satisfacen:

1. α_t es lineal;
2. $\alpha_t(a^*) = \alpha_t(a)^*$ para todo $a \in \mathcal{A}$;
3. $\alpha_t(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$;
4. (positividad) $\alpha_t(a)$ es positivo si $a \in \mathcal{A}$ lo es;
5. $\alpha_0(a) = a$ para todo $a \in \mathcal{A}$;
6. (normalidad) α_t es normal[2]
7. (Continuidad débil en t) para todo $a \in \mathcal{A}$ y todo funcional lineal continuo y normal ϕ sobre $\mathcal{A}$, el mapa $t \mapsto \phi(\alpha_t(a)) \in \mathbb{C}$ es continuo.

En lo que sigue un semigrupo de estas características se denominará QDS. Observese que, en general no se requiere que $\alpha_t(ab) = \alpha_t(a)\alpha_t(b)$ para $a, b \in \mathcal{A}$; o sea α_t no es necesariamente un endomorfismo de álgebra (en cuyo caso la positividad sería automática).

No es dificil convencerse que en el caso especial de un QDS donde cada α_t es invertible[3] y un $*$-endomorfismo de $\mathcal{A}$, el comportamiento asintótico para $t \to \infty$ no trae consigo simplificación substancial alguna[4].

El objeto del trabajo es analizar la validez de una descomposición de tipo Jacobs-de Leeuw-Glicksberg[5] a nivel de $\mathcal{A}$ para un QDS arbitrario pero en el particular caso en el cual $\mathcal{A}$ es el álgebra de los operadores lineales sobre un espacio de Hilbert complejo de dimensión finita o, lo que es lo mismo, $M_n(\mathbb{C})$ las matrices $n \times n$ con entradas complejas (n es la dimensión del espacio de Hilbert). ¿Hay una W^*-subalgebra (con

[1] $\alpha_t \circ \alpha_s = \alpha_{t+s}$, para $t, s \geq 0$.

[2] Para toda sucesión $\{a_n\}$ en $\mathcal{A}$ que es uniformemente acotada $\sup_n \alpha_t(a_n) = \alpha_t(\sup_n(a_n))$.

[3] e.g., dinámicas reversibles de sistemas cuánticos cerrados.

[4] Cuando $\mathcal{A}$ es de dimensión finita, los mapas $t \mapsto \phi(\alpha_t(a))$ son cuasi-periódicos.

[5] K. de Leeuw and I. Glicksberg. Applications of almost periodic compactifications, Acta Math. **105**, 63-97 (1961).

la misma unidad) $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$ y un semigrupo $\{\delta_t : t \geq 0\}$ de *-automorfismos de $\mathcal{M}$ y una "esperanza condicional" $\epsilon : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ de modo que

$$\alpha_t \asymp \delta_t \circ \epsilon \ , \quad t \to \infty \ ?$$

Este comportamiento asintótico deberá entenderse, en general, como una versión débil de (1); i.e. $\lim_{t\to\infty} \phi(\alpha_t(a) - \delta_t(\epsilon(a))) = 0$ para $\forall a \in \mathcal{A}$ y para todo funcional lineal positivo ϕ de $\mathcal{A}$. Este resultado es de enorme utilidad práctica pues reduce la dinámica a tiempos grandes a la dinámica reversible de una proyección a una subálgebra. Es particularmente interesante si se puede determinar a $\mathcal{M}$, a ϵ y a δ_t o sus propiedades mas o menos explicitamente.

El problema en el ámbito W^*-álgebras ha sido analizado por Olkiewicz[6] y los resultados se comentan y extienden en la tesis doctoral de Hellmich[7]. Se obtiene la descomposición requerida bajo distintas hipótesis restrictivas sobre la existencia de funcionales lineales positivos normales invariantes[8] y, además, suponiendo alguna condición de positividad más fuerte que 4.

Los QDS se han usado desde los años 70 para modelar sistemas cuánticos abiertos. En este contexto se pide una condición más fuerte que la positividad llamada positividad completa que requiere que la extensión natural de $\alpha_t \otimes id$ a $\mathcal{A} \otimes M_n(\mathbb{C})$ sea positiva (n-positiva) para todo $n = 2, 3, \cdots$[9].

En el caso particular matricial explicitado, si se pide positividad completa de cada α_t, la estructura del generador L del semigrupo (i.e., $\alpha_t = \exp\{tL\}$) es conocida[10]. ¿Como se determinan $\mathcal{N}$, $\{\delta_t\}$ y ϵ a partir de L?

Interesa sobre todo una demostración elemental ¡si la hay ! en el caso[11] $M_n(\mathbb{C})$ (toda W^*-álgebra de dimensión finita es suma directa de estas); asi como aplicar la descomposición a la discusión de la evolución dinámica del entrelazamiento de sistemas cuánticos compuestos pero abiertos. Sobre este último fenómeno hay bastante bibliografía disponible pero lamentablemente de muy poca calidad.

Dr. G.A. Raggio

[6] R. Olkiewicz: Environment-Induced Superselection Rules in Markovian Regime. Commun. Math. Phys. **208**, 245-265 (1999). Hay trabajos posteriores con Blanchard y otros.

[7] M. Hellmich: Decoherence in Infinite Quantum Systems. Dissertation zur Erlangung der Doktorgrades der Fakultät für Physik der Universität Bielefeld, Januar 2009.

[8] Estos resultados se han aplicado a la discusión de la emergencia de comportamiento clásico en sistemas cuánticos abiertos.

[9] El ejemplo canónico es la transposición de matrices que es positiva pero no 2-positiva.

[10] Trabajos clásicos de Gorini, Kossakowski, y Sudarshan y de Lindblad.

[11] donde la compacidad permite dispensar de hipótesis restrictivas.