ÁLGEBRA I / MATEMÁTICA DISCRETA I
PRÁCTICO 1 : **RESPUESTAS**

(1) ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?
  (a) Si un número entero es múltiplo de 6, entonces es múltiplo de 3.
  Verdadera: Si n es múltiplo de 6 entonces existe m tal que $n = 6 \cdot m$. pero luego $n = 3 \cdot 2 \cdot m = 3 \cdot (2 \cdot m)$ y por lo tanto es también múltiplo de 3.
  (b) Si un número entero es múltiplo de 6, entonces no es múltiplo de 3.
  Falsa: Basta un contraejemplo, 6 es múltiplo de 6 $(6 \cdot 1)$ y de 3 $(3 \cdot 2)$.
  (c) Si un número entero no es múltiplo de 6, entonces no es múltiplo de 3.
  Falsa: Un contraejemplo es: 3.
  (d) Si un número entero es múltiplo de 3, entonces es múltiplo de 6.
  Falsa: Esta proposición es idéntica a la anterior.
  (e) Si un número entero es múltiplo de 3, entonces no es múltiplo de 6.
  Falsa: Un contraejemplo es 6.

(2) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
  (a) $x^2 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
  Falsa: Tomemos $x = 2$, luego $2^2 = 4 \neq 2$.
  (b) $x^2 = x$, para algún $x \in \mathbb{R}$.
  Verdadera: Tomemos $x = 1$, luego $1^2 = 1$.
  (c) $x^2 = x$, para exactamente un $x \in \mathbb{R}$.
  Falsa: Es también cierta para $x = 0$.

(3) ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Justificar.
  (a) $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$.
  Falsa: Sea $a = 2$ y $b = -2$.
  (b) $a^2 = b^2 \Rightarrow a = -b$.
  Falsa: Sea $a = 2$ y $b = 2$.
  (c) $a^2 = b^2 \Rightarrow |a| = |b|$.
  Verdadera: Supongamos que la afirmación *f)* es verdadera, luego o $a = b$, en cuyo caso $|a| = |b|$, o $a = -b$, en cuyo caso $|a| = |-b| = |b|$. Como solo se pueden dar estos dos caso y en ambos la afirmación es verdadera esta es verdadera siempre.
  (d) $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ y $a = -b$.
  Falsa: Sea $a = 2$ y $b = 2$.
  (e) $a^2 = b^2 \Rightarrow a^3 = b^3$.
  Falsa: Sea $a = 2$ y $b = -2$, luego $a^3 = 8$, mientras que $b^3 = -8$.
  (f) $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ o $a = -b$.
  Verdadera: $a^2 = b^2 \Rightarrow 0 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ pero entonces al menos uno de los términos en el producto debe ser cero: o $(a + b) = 0$, en cuyo caso $a = -b$ o $a - b = 0$, en cuyo caso $a = b$.

(4) Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:
  (a) $a < b$ si y sólo si $a^2 < b^2$.
  Falsa: Sea $a = -1$ y $b = 0$, luego $a < b$, pero $a^2 = 1 > 0 = b^2$.
  (b) Existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Falsa: En principio podría ser verdadera, es una ecuación para dos incognitas y por lo tanto parecería que podemos resolverla expresando una incognita como función de la otra. Pero veamos que no hay solución. Cláramente $a = 0$, o $b = 0$ o $a + b = 0$ no son soluciones (alli la función inversa no esta definida) por lo tanto podemos multiplicar esta expresión por estas tres cantidades simultáneamente sin riezgo de perder ninguna solución. Ese producto da,

$$\begin{aligned}
(a+b)\cdot a\cdot b\cdot\frac{1}{a+b} &= (a+b)\cdot a\cdot b\cdot\frac{1}{a}+(a+b)\cdot a\cdot b\cdot\frac{1}{b} &(1)\\
a\cdot b &= (a+b)\cdot b+(a+b)\cdot a &(2)\\
a\cdot b &= (a+b)^2 &(3)\\
a\cdot b &= a^2+b^2+2\cdot a\cdot b &(4)\\
0 &= a^2+b^2+a\cdot b &(5)
\end{aligned}$$

En el cuarto paso se ve que $a \cdot b$ debe ser positiva o cero (si $a = -b$) pero luego en el quinto paso (donde hemos pasado el término de la izquierda (restando) a la derecha), tenemos tres términos no-negativos, la única manera que esta suma sea nula es que cada uno de ellos se anule, es decir necesitamos $a = b = 0$, pero ya vimos que esto no es solución.

(c) $\forall a,\ b \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Falsa: Ya vimos que no era cierta para ningún par de números (a, b), menos lo puede ser para todos!

(5) Decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas y dar la negación de cada una de ellas.

(a) $(\forall x), (x-1)(x+1) = x^2 - 1$.
Verdadera: Desarrolle el producto.
La negación sería: $(\exists x)\ :\ (x-1)(x+1) \neq x^2 - 1$.

(b) $(\forall x), [(\exists y)\ :\ x^2 + y^2 = (x+y)^2]$.
Verdadera: $y = 0$ sirve $\forall x$.
La negación sería: $(\exists x)\ :\ (\forall y),\ x^2 + y^2 \neq (x+y)^2]$.

(c) $(\forall x), x > 0 \Rightarrow (\exists y)\ :\ 0 < y < x]$.
Verdadera: Sea por ejemplo $y = x/2$.
La negación sería: $(\exists x), x > 0, \Rightarrow (\forall y)\ :\ 0 < x < y]$.

(d) $(\exists x)\ :\ [(\forall y), x + y = 0]$.
Falsa: Fijemos x, y supongamos la afirmación es correcta, luego tenemos que $y = -x$ (la propiedad que la operación suma tiene una única inversa). Pero esto dice entonces que esta proposición es verdadera solo para un valor de y $(-x)$.
La negación sería: $(\forall x)\,[(\exists y)\ :\ x + y \neq 0]$.

(e) $(\forall x), [(\forall y), x + y = 0]$.
Falsa: Esta es aun más fuerte que la anterior.
La negación sería: $(\exists x)$ y $(\exists y)\ : x + y \neq 0$.

(f) $(\exists x)\ :\ x(x+4) = x^2 - 4$.
Verdadera: Sea $x = -1$, luego $(-1)\cdot(-1+4) = -3 = (-1)^2 - 4 = -3$.
La negación sería: $(\forall x),\ x(x+4) \neq x^2 - 4$.

(g) $(\forall x), x(x+4) = x^2 - 4$.
Falsa: $x = 0$ es un contraejemplo.
La negación sería: $(\exists x) \ : \ x(x+4) \neq x^2 - 4$.