ÁLGEBRA I / MATEMÁTICA DISCRETA I
PRÁCTICO 2

(1) Decir si los siguientes conjuntos son inductivos. Justificar.
- (a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}\}$.
- (b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x + 4$ es múltiplo de 5 $\}$.
- (c) Un subconjunto finito de $\mathbb{N}$.
- (d) Un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ que contenga al 1.
- (e) $\mathbb{N} \cup \{0\}$.
- (f) $\mathbb{N} \cup \{\frac{1}{2}\}$.

(2) Dado un natural m, probar que $\forall n \in \mathbb{N}$; x, $y \in \mathbb{R}$, se cumple:
a) $x^n.x^m = x^{n+m}$, b) $(x^n)^m = x^{n.m}$, c) $(x.y)^n = x^n.y^n$.
Respuestas:
a)
$$x^n.x^m = \underbrace{(x.x.....x)}_{n}.\underbrace{(x.x...x)}_{m} = \underbrace{x.x.......x}_{n+m} = x^{n+m}$$

(3) Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:
a) $(2^{2^n})^{2^k} = 2^{2^{n+k}}$; n, $k \in \mathbb{N}$. b) $(2^n)^2 = 4^n$; $n \in \mathbb{N}$. c) $2^{7+11} = 2^7 + 2^{11}$.

(4) Calcular:
a) $2^5 - 2^4$, b) $2^{n+1} - 2^n$, c) $(2^2)^n + (2^n)^2$ d) $(2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1)$

(5) Calcular
a) $\displaystyle\sum_{r=0}^{4} r$, b) $\displaystyle\prod_{i=1}^{5} i$ c) $\displaystyle\sum_{k=-3}^{-1} \frac{1}{k(k+4)}$ d) $\displaystyle\prod_{n=2}^{7} \frac{n}{n-1}$

(6) Demostrar por inducción las siguientes igualdades:
a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$
c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$ d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$ f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, donde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0,\ 1$.
h) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i} = n+1$.

(7) Probar que la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $(n-2).180$ grados.

(8) Probar las siguientes afirmaciones:
- (a) $a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$, $\Rightarrow (1+a)^n \geq 1 + na$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- (b) $n^4 \leq 4^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$.
- (c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^n \geq 1 + 2^n$.
- (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)^2$.

(9) Hallar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se cumpla que $n^2 \geq 11n + 3$.

(10) Las siguientes proposiciones no son válidas para todo $n \in \mathbb{N}$. Indicar en qué paso del principio de inducción falla la demostración:

a) $n = n^2$; b) $n = n + 1$ c) $3^n = 3^{n+2}$.