ÁLGEBRA I / MATEMÁTICA DISCRETA I
PRÁCTICO 2: **RESPUESTAS**

(1) Decir si los siguientes conjuntos son inductivos. Justificar.
   (a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}\}$.
   (b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x + 4$ es múltiplo de 5 $\}$.
   (c) Un subconjunto finito de $\mathbb{N}$.
   (d) Un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ que contenga al 1.
   (e) $\mathbb{N} \cup \{0\}$.
   (f) $\mathbb{N} \cup \{\frac{1}{2}\}$.

   Respuestas: Un conjunto S, de números es inductivo si contiene al elemento 1 y si un elemento q pertenece a S, luego $q+1$ pertenece a S. Un ejemplo no trivial es el siguiente: $\{1\} \cup [2, +\infty)$.
   (a) Este no es pues el segundo elemento es $\sqrt{2}$ pero $\sqrt{2}+1$ no forma parte del conjunto. Para ver que esto es asi supongamos, por el absurdo que si pertenece, es decir que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{2} + 1 = \sqrt{n}$. Pero elevando al cuadrado obtenemos, $3 + 2\sqrt{2} = n$ y por lo tanto $\sqrt{2} = (n-3)/2$ lo que es absurdo ya que $\sqrt{2}$ es irracional.
   (b) Este no es pues los múltiplos de 5 van de 5 en 5 y por lo tanto este conjunto tiene números que van de 5 en 5 (corridos cuatro lugares a partir de 5) y por lo tanto si n pertenece al conjunto $n+1$ no. Por ejemplo, 1 pertenece $(1+4=5)$, pero $1+1=2$ no, $(2+4=6$ no es divisible por 5).
   (c) No, pues si es finito tiene un elemento máximo, digamos m, y por lo tanto $m+1$ no esta en el conjunto.
   (d) No, pues si es un subconjunto propio (o sea no idéntico $\mathbb{N}$) a falta algún número, supongamos que m es el menor números que faltan, luego $m-1$ tampoco esta en el conjunto, ya que $(m-1)+1 = m$ no esta. Continuando de esa manera vemos que $m-2$ no esta y asi sucesivamente hasta llegar a la conclusión que 1 tampoco puede estar y por lo tanto que el conjunto no puede ser inductivo.
   (e) Si, este esta, pues $0+1$ esta y todos los demás también.
   (f) No, pues $\frac{3}{2}$ no pertenece.

(2) Dado un natural m, probar que $\forall n \in \mathbb{N}$; x, $y \in \mathbb{R}$, se cumple:
   a) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$, b) $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$, c) $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$.

   Respuestas:
   a) Por inducción en n, m fijo, cualquiera. Para $n=1$ tenemos, $x^1 \cdot x^m = x \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{m} = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \ldots \cdot x}_{1+m} = x^{1+m}$ donde hemos usado asociatividad del producto. Suponemos ahora que es valido para n: $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ y tenemos para $n+1$: $x^(n+1) \cdot x^m = (x \cdot x^n) \cdot x^m = x \cdot (x^n \cdot x^m) = x \cdot x^{n+m} = x^{n+m+1}$. Donde en la última igualdad hemos usado el caso $n=1$ para $m = n+m$.
   b) Por inducción en n, m fijo, cualquiera. Para $n=1$ tenemos, $(x^1)^m = (x)^m = x^m$. Suponemos ahora que es valido para n: $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$ y tenemos para $n+1$: $(x^(n+1))^m = (x^1 \cdot x^n)^m = x^m \cdot x^{n \cdot m} = x^{m+n \cdot m} = x^{(n+1) \cdot m}$. Donde un la primera hemos usado la identidad del punto anterior, en la segunda la identidad del punto siguiente (que probaremos sin usar esta!) y el la tercera nuevamente la identidad del punto anterior.
   c) Por inducción en n. Para $n=1$ tenemos, $(x \cdot y)^1 = x \cdot y$. Suponemos ahora que es valido para n: $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$ y tenemos para $n+1$: $(x \cdot y)^{n+1} = (x \cdot y) \cdot (x \cdot y)^n = (x \cdot y) \cdot (x^n \cdot y^n) = x \cdot y \cdot x^n \cdot y^n = x \cdot x^n \cdot y \cdot y^n = (x \cdot x^n) \cdot (y \cdot y^n) = x^{n+1} \cdot y^{n+1}$.

(3) Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

a) $(2^{2^n})^{2^k} = 2^{2^{n+k}}$; $n,\, k \in \mathbb{N}$. b) $(2^n)^2 = 4^n$; $n \in \mathbb{N}$. c) $2^{7+11} = 2^7 + 2^{11}$.

Respuestas: a) Use b) del ejercicio anterior. b) Use c) del ejercicio anterior, con $x = y = 2$. c) Es incorrecta, pues usando a) del ejercicio anterior tenemos que $2^{7+11} = 2^7 \cdot 2^{11} = 128 \times 2048 = 262144$ mientras que $2^7 + 2^{11} = 128 + 2048 = 2176$

(4) Calcular:

a) $2^5 - 2^4$, b) $2^{n+1} - 2^n$, c) $(2^2)^n + (2^n)^2$ d) $(2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1)$

Respuestas:

a) $2^5 - 2^4 = 32 - 16 = 16$ o $2 \cdot 2^4 - 2^4 = (2-1) * 2^4 = 2^4$. b) $2^{n+1} - 2^n = 2 \cdot 2^n - 2^n = (2-1) \cdot 2^n = 2^n$ c) $(2^2)^n + (2^n)^2 = (2 \cdot 2)^n + 2^n \cdot 2^n = 2^n \cdot 2^n + 2^n \cdot 2^n = 2 \cdot 2^n \cdot 2^n = 2 \cdot 2^{2n} = 2^{2n+1}$. d) $(2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1) = 2^{2^n} \cdot 2^{2^n} - 1 = 2^{2^n + 2^n} - 1 = 2^{2 \cdot 2^n} - 1 = 2^{2^{n+1}} - 1$.

(5) Calcular

a) $\displaystyle\sum_{r=0}^{4} r$, b) $\displaystyle\prod_{i=1}^{5} i$ c) $\displaystyle\sum_{k=-3}^{-1} \frac{1}{k(k+4)}$ d) $\displaystyle\prod_{n=2}^{7} \frac{n}{n-1}$

Respuestas:

a) $\displaystyle\sum_{r=0}^{4} r = 10$, b) $\displaystyle\prod_{i=1}^{5} i = 120$ c) $\displaystyle\sum_{k=-3}^{-1} \frac{1}{k(k+4)} = -\frac{11}{12}$ d) $\displaystyle\prod_{n=2}^{7} \frac{n}{n-1} = 7$

(6) Demostrar por inducción las siguientes igualdades:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$ d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$ f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$, donde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0,\ 1$.

h) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i} = n + 1$.

Respuestas:

a) $P(1)$: $\sum_{k=1}^{1} (a_k + b_k) = a_1 + b_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k + \sum_{k=1}^{1} b_k$ se cumple.

$P(n-1)$: $\sum_{k=1}^{(} n-1)(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{(} n-1)a_k + \sum_{k=1}^{(} n-1)b_k$ se supone.

$P(n)$: $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{(} n-1)(a_k + b_k) + (a_n + b_n) = \sum_{k=1}^{(} n-1)a_k + \sum_{k=1}^{(} n-1)b_k + a_n + b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

b) $P(1)$: $\frac{1=1(1+1)}{2}$ se cumple.

$P(n-1)$: $\sum_{j=1}^{(} n-1)j = \frac{(n-1)n}{2}$ se supone.

$P(n)$: $\sum_{j=1}^{n} j = \sum_{j=1}^{(} n-1)j + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

c) $P(1)$: $\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1+1}$ se cumple.

$P(n-1)$: $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n-1}{n}$ se supone.

$P(n)$: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

d) $P(1)$: $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$ se cumple. $P(n-1)$: $\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6}$ se supone. $P(n)$: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + n^2 = \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} + \frac{6n^2}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(7) Probar que la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $(n-2) \cdot 180$ grados.

Respuesta: Se prueba por inducción en el número de lados. Para el triángulo es cierto: tome un vértice cualquiera y dibuje una línea paralela al lado opuesto que pase por dicho vertice. Usando que los ángulos alternos internos son iguales vea que la suma de los mismos es de 180^o. Supongamos que es cierto para $n-1$ es decir que si tenemos un polígono de $n-1$ lados $(n>2)$ se cumple que la suma de los ángulos es $(n-3)\cdot 180^o$. Sea entonces un polígono de n lados y considere tres vértices consecutivos. Trace una linea recta entre los dos vértices que no son contiguos. Hemos asi dividido el polígono en uno de $n-1$ lados y un triángulo. Se ve facilemente (haga un dibujo) que la suma de la suma de los ángulos de cada uno de estos dos polígono nos da la suma de los ángulos del polígono inicial. Por lo tanto tenemos $(n-3)\cdot 180^o + 180^o = (n-2)\cdot 180^o$.

(8) Probar las siguientes afirmaciones:
   (a) $a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$, $\Rightarrow (1+a)^n \geq 1+na$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   (b) $n^4 \leq 4^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$.
   (c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^n \geq 1+2^n$.
   (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)^2$.

   Respuesta:
   (a) Por inducción: Para $n=1$ tenemos $(1+a)^1 = 1+a$ y por lo tanto se cumple. Suponemos es válida para n, es decir $(1+a)^n \geq 1+na$ y debemos probarlo para $n+1$: $(1+a)^{n+1} = (1+a)\cdot(1+a)^n \geq (1+a)\cdot(1+na) = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$. Donde en la primer desigualdad hemos usado que $(1+a)\geq 0$ y en la segunda que $na^2 \geq 0$.
   (b) Por inducción: Para $n=5$, $5^4 = 625$ mientras que $4^5 = 1024$ y por lo tanto se cumple. Suponemos es válida para n, es decir, $n^4 \leq 4^n$ y debemos probarlo para $n+1$: $(n+1)^4 = n^4+4n^3+6n^2+4n+1 = n^4(1+4n^{-1}+6n^{-2}+4n^{-3}+1n^{-4}) \leq 4^n(1+4n^{-1}+6n^{-2}+4n^{-3}+1n^{-4}) \leq 4^n(1+\frac{4}{5}+\frac{6}{5^2}+\frac{4}{5^3}+\frac{1}{5^4}) = 4^n\frac{1296}{625} \leq 4^n 4 = 4^{n+1}$
   (c) Por inducción: Para $n=1$ tenemos $3=1+2$ y por lo tanto se cumple. Suponemos es válida para n, es decir $3^n \geq 1+2^n$ y debemos probarlo para $n+1$: $3^{n+1} = 3^n\cdot 3 \geq (1+2^n)\cdot 3 = 3+3\cdot 2^n = 3+\frac{3}{2}2^{n+1} = 1+2^{n+1}+(2+\frac{1}{2}2^{n+1}) \geq 1+2^{n+1}$.
   (d) Por inducción: Para $n=0$ tenemos $a_0^2 = |a_0|^2$ y por lo tanto se cumple. Suponemos es válida para n, es decir $\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{n}|a_k|\right)^2$ y debemos probarlo para $n+1$: $\sum_{k=0}^{n+1} a_k^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k^2 + a_{n+1}^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{n}|a_k|\right)^2 + |a_{n+1}|^2 = \left(\sum_{k=0}^{n}|a_k|\right)^2 + |a_{n+1}|^2 + 2\left(\sum_{k=0}^{n}|a_k|\right)|a_{n+1}| - 2\left(\sum_{k=0}^{n}|a_k|\right)|a_{n+1}| = \left(\sum_{k=0}^{n}|a_k| + |a_{n+1}|\right)^2 - 2\left(\sum_{k=0}^{n}|a_k|\right)|a_{n+1}| = \left(\sum_{k=0}^{n+1}|a_k|\right)^2 - 2\left(\sum_{k=0}^{n}|a_k|\right)|a_{n+1}| \leq \left(\sum_{k=0}^{n+1}|a_k|\right)^2$

(9) Hallar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se cumpla que $n^2 \geq 11n+3$.

   Respuesta: Recien comienza a cumplirse para $n \geq 12$. Para ese valor tenemos: $12^2 = 144$, mientras que $11n+3 = 135$. Suponemos válida para $n(\geq 12)$, y debemos probar para $n+1$. $(n+1)2 = n^2+2n+1 \geq 11n+3+2n+1 = 11(n+1)+3+(2n+1)-11 \geq 11(n+1)+3$, donde en la última desigualdad hemos usado que si $n \geq 12$ luego $(2n+1)-11 > 0$.

(10) Las siguientes proposiciones no son válidas para todo $n \in \mathbb{N}$. Indicar en qué paso del principio de inducción falla la demostración:
   a) $n = n^2$;   b) $n = n+1$ c) $3^n = 3^{n+2}$.