ÁLGEBRA I / MATEMÁTICA DISCRETA I
PRÁCTICO 4 (corresponde al capítulo 3)

1. Sean a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

   a) $\forall a$, $a \mid 0$. (En particular, $0 \mid 0$).

   b) $\forall a \neq 0$, $0 \not| \, a$.

   c) Si $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \mid b$ y $b \mid a$, entonces $a = b$ ó $a = -b$.

   d) Si $a \mid 1$, entonces $a = 1$ ó $a = -1$.

   e) Si $ab = 1$, entonces $a = b = 1$ ó $a = b = -1$.

   f) Si $a \neq 0$, $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid (b + c)$ y $a \mid (b - c)$.

   g) Si $a \neq 0$, $a \mid b$ y $a \mid (b + c)$, entonces $a \mid c$.

   h) Si $a \neq 0$ y $a \mid b$, entonces $a \mid bc$.

2. Probar las siguientes propiedades:

   i) 0 es par. ii) 1 es impar.

   iii) Si b es par y $b \mid c$, entonces c es par. (Por lo tanto, si b es par, también lo es $-b$).

   iv) Si b y c son pares, entonces $b+c$ también lo es. (Por lo tanto, la suma de una cantidad cualquiera de números pares es par).

   v) Si un número par divide a 2, entonces ese número es 2 o -2.

   vi) La suma de un número par y uno impar es impar.

3. Probar que n es par si y sólo si n^2 es par.

4. Probar que $n(n + 1)$ es par.

5. Sean a, b, $c \in \mathbb{Z}$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Justificar las respuestas.

   a) $a \mid bc \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$.

   b) $a \mid (b + c) \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$.

   c) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow ab \mid c$.

   d) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow (a + b) \mid c$.

   e) a, b, $c > 0$ y $a = bc \Rightarrow a \geq b$ y $a \geq c$.

6. -"Pensá un número de dos cifras (que no sean iguales)".

   -" Ya está" (57).

   -" Invertí el orden de las cifras".

   -"Ya está" (75).

   - " El nuevo número, ¿es mayor o menor que el primero?"

- “Mayor”.
- “Entonces, restá el número que pensaste del nuevo número”.
- “Ya está” ($75 - 57 = 18$).
- “Ahora, sumá las cifras del número que pensaste al principio”.
- “Ya está”. (5+7=12).
- “Decime los dos números que obtuviste”.
- “18 el primero y 12 el segundo”.
- (Calcula: $\frac{18}{9} = 2$, $\frac{12+2}{2} = 7$ y $\frac{12-2}{2} = 5$). “Pensaste el 57”.

Explicar cómo es el truco y por qué siempre funciona.

7. Probar que cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$:
   a) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es múltiplo de 11.
   b) $3^{4n+2} + 2.4^{3n+1}$ es múltiplo de 17.
   c) $2^{2n-1}.3^{n+2} + 1$ es divisible por 11.
   d) $3^{2n+2} - 8n - 9$ es divisible por 64.

8. Decir si es verdadero o falso justificando:
   a) $3^n + 1$ es múltiplo de n, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   b) $2.5^n + 1$ es múltiplo de 4, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   c) $10^{2n} - 1$ es múltiplo de 11, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   d) $3n^2 + 1$ es múltiplo de 2, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   e) $n^3 - n$ es múltiplo de 2, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   f) $(n+1)(5n+2)$ es múltiplo de 2, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   g) $n(n+4)(n+2)$ es múltiplo de 3, $\forall n \in \mathbb{N}$.

9. Probar que no existen dos múltiplos de 3 que sumen 100.

10. Hallar el cociente y el resto de la división de:
    i) 135 por 23, ii) -135 por 23. iii) 135 por -23
    iv) -135 por -23, v) -98 por 73 vi) -98 por -73.

11. a) Si $a = bq + r$, con $b \leq r < 2b$, hallar el cociente y el resto de la división de a por b.
    b) Repetir el ejercicio anterior, suponiendo ahora que $-b \leq r < 0$.

12. Expresar 1810, 1816 y 1972 en bases $s = 3,\ 5,\ 7,\ 11$.

13. Expresar en base 10 los siguientes enteros:
    a) $(1503)_6$ b)$(1111)_2$ c) $(1111)_{12}$
    d) $(123)_4$ e) $(12121)_3$ f) $(1111)_5$

14. Calcular: a) $(2234)_5 + (2310)_5$ b) $(10101101)_2 + (10011)_2$.