ÁLGEBRA I / MATEMÁTICA DISCRETA I
PRÁCTICO 5 (corresponde al capítulo 3)

1. Dar todos los números primos positivos menores que 100.

2. a) Calcular el máximo común divisor y expresarlo como combinación lineal de los número dados:

   i) 14 *y* 35 *ii)* 11 *y* 15 *iii)* 12 *y* 52 *iv)* 12 *y* -52 *v)* 12 *y* 532.

   b) Calcular el mínimo común múltiplo de los números dados en el item (a).

3. Encontrar $(7469, 2464)$, $(2689, 4001)$, $(2447, -3997)$, $(-1109, -4999)$.

4. Dado un entero a, hallar $(0, a)$.

5. Probar que si $(a, b) = 1$ y $n + 2$ es un número primo, entonces $(a + b, a^2 + b^2 - nab) = 1$ ó $n + 2$.

6. Probar que $(a + b, [a, b]) = (a, b)$. En particular, si dos números son coprimos, también lo son su suma y su producto.

7. Probar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $2n + 1$ y $\frac{1}{2}n(n + 1)$ son coprimos.

8. Probar: i) $(a, b) = 1$, $a \mid c$ y $b \mid c$, $\Rightarrow ab \mid c$.

   ii) $(a, b) = 1$ y $a \mid bc \Rightarrow a \mid c$.

9. a) Probar que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.

   b) Probar que el producto de cuatro enteros consecutivos es divisible por 24.

10. Demostrar que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n > 2$, existe p primo tal que $n < p < n!$. (Ayuda: pensar qué primos dividen a $n! - 1$.)

11. Completar y demostrar:

    a) Si $a \in \mathbb{Z}$, entonces $[a, a] = \ldots$.

    b) Si a, $b \in \mathbb{Z}$, $[a, b] = b$ si y sólo si ….

    c) $(a, b) = [a, b]$ si y sólo si ….

12. ¿Existen enteros m y n tales que:

    a) $m^4 = 27$? b) $m^2 = 12n^2$? c) $m^3 = 47n^3$?

13. Encontrar todos los enteros positivos a y b tales que $(a, b) = 10$, y $[a, b] = 100$.

14. Si ab es un cuadrado y a y b son coprimos, probar que a y b son cuadrados.

15. Mostrar que 725 y 441 son coprimos y encontrar enteros m, n tales que $1 = m.725 + n.441$.

16. Probar que $\sqrt{6}$ es irracional.

17. Probar que $2^{3n+1} + 7^{3n+1}$ es divisible por 9 para todo $N \in \mathbb{N}$, n par.

18. Calcular el máximo común divisor entre 606 y 108 y expresarlo como combinación lineal de esos números.

19. Probar que todo entero impar que no es múltiplo de 3 es de la forma $6m \pm 1$ para algún $m \in \mathbb{Z}$.

20. Probar que si d es un divisor común de a y b, entonces

$$a)\ \frac{(a,b)}{d} = (\frac{a}{d}, \frac{b}{d}). \qquad\qquad b)\ \frac{[a,b]}{d} = [\frac{a}{d}, \frac{b}{d}].$$

21. Probar que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n^2 + 2$ no es divisible por 4.

22. Dado un entero $a > 0$ fijo, caracterizar aquellos números que al dividirlos por a tienen cociente igual al resto.

23. Sea p primo positivo. Probar que $(p, (p-1)!) = 1$.

24. Hallar el menor múltiplo de 168 que sea un cuadrado.

25. Probar que si $(a, 4) = 2$ y $(b, 4) = 2$ entonces $(a + b, 4) = 4$.

26. Probar que el producto de dos enteros consecutivos no nulos no es un cuadrado. (Ayuda: usar el Teorema Fundamental de la Aritmética).