ÁLGEBRA I / MATEMATICA DISCRETA I
PRACTICO 6

(1) a) Calcular el resto de la división de 1599 por 39 sin tener que hacer la división.
b) Lo mismo con el resto de 914 al dividirlo por 31.

(2) Probar que todo número de la forma $4^n - 1$ es siempre divisible por 3.

(3) Probar que el resto de dividir n^2 por 4 es igual a cero si n es par y 1 si n es impar.

(4) Probar que si las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo son números enteros entonces los catetos no pueden ser ambos impares.

(5) Probar las reglas de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11 que no hayan sido probadas en el teórico.

(6) Decir por cuáles de los números del 2 al 11 son divisibles los siguientes números:
a) 12342 b) 5176 c) 314573 d) 899

(7) Hallar los restos posibles en la división de n^2 por 3.

(8) Sean a, b, c números enteros, ninguno divisible por 3. Probar que $a^2 + b^2 + c^2$ es divisible por 3.

(9) Hallar la cifra de las unidades y la de las decenas del número 7^{15}.

(10) Hallar el resto en la división de x por 5 y por 7 para:
a) $x = 1^8 + 2^8 + 3^8 + 4^8 + 5^8 + 6^8 + 7^8 + 8^8$, b) $x = 3.11.17.71.101$.

(11) Sean $a, b, m \in \mathbb{Z}$, $d > 0$, $d|a$, $d|b$, $d|m$. Probar que la ecuación

$$(1) \qquad ax \equiv b \mod (m)$$

tiene solución si y sólo si la ecuación:

$$(2) \qquad \frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d} \mod (\frac{m}{d})$$

tiene solución. Más aún si x_0 es solución de (1), entonces $x_0 + km$, $k \in \mathbb{Z}$ es también solución de (1). ¿Cuales son entonces las soluciones de (2)?.

(12) Resolver las siguientes ecuaciones:

$$a)\, 2x \equiv -21 \mod (8), \ b)\, 2x \equiv -12 \mod (7), \ c)\, 3x \equiv 5 \mod (4).$$

(13) Resolver la ecuación $221x \equiv 85 \mod (340)$. Hallar todas las soluciones x tales que $0 \leq x < 340$.

(14) Hallar todos los x que satisfacen:

$a)\, x^2 \equiv 1 \mod (4)$ $b)\, x^2 \equiv x \mod (12)$ $c)\, x^2 \equiv 2 \mod (3)$
$d)\, x^2 \equiv 0 \mod (12)$ $e)\, x^4 \equiv 1 \mod (16)$ $f)\, 3x \equiv 1 \mod (5)$
$g)\, 2x \equiv 5 \mod (6)$ $h)\, 3x^2 \equiv 20 \mod (8)$

(15) Dado $t \in \mathbb{Z}$, decimos que t es *inversible módulo* m si existe $h \in \mathbb{Z}$ tal que $th \equiv 1 \mod (m)$.
(a) ¿Es 5 inversible módulo 17?.
(b) ¿Existe algún m tal que m sea inversible módulo m?
(c) Probar que t es inversible módulo m si y sólo si $(t, m) = 1$.
(d) Determinar los inversibles módulo m para m= 11, 12, 16.

(16) Encontrar los enteros cuyos cuadrados divididos por 19 dan resto 9.

(17) Probar que todo número entero impar satisface: $a^4 \equiv 1(16)$, $a^8 \equiv 1(32)$, $a^{16} \equiv 1(64)$. ¿Se puede asegurar que $a^{2^n} \equiv 1(2^{2n+2})$?

(18) Encuentre el resto en la división de a por b en los siguientes casos:

$$i)\ a = 11^{13}.13^8,\ b = 12, \quad ii)\ a = 4^{1000},\ b = 7$$
$$iii)\ a = 123^{456},\ b = 31, \quad iv)\ a = 7^{83},\ b = 10$$

(19) Obtenga el resto en la división de

$$i)\ 2^{21} \text{ por } 13, \quad ii)\ 3^8 \text{ por } 5, \quad iii)\ 8^{25} \text{ por } 127.$$

(20) Probar que si $(a, 1001) = 1$ entonces 1001 divide a $a^{720} - 1$.

(21) Decir si existe $x \in \mathbb{N}$ tal que se satisfacen simultáneamente las siguientes ecuaciones:

$$a)\ x \equiv 1 \mod (3), \quad x \equiv 1 \mod (5), \quad x \equiv 1 \mod (7)$$
$$b)\ x \equiv 2 \mod (3), \quad x \equiv 3 \mod (5), \quad x \equiv 5 \mod (2)$$
$$c)\ x \equiv 5 \mod (2), \quad x \equiv 2 \mod (4)$$

(22) Hallar cuatro enteros consecutivos divisibles por 5, 7, 9 y 11 respectivamente.

(23) a) Probar que no existen enteros no nulos tales que $x^2 + y^2 = 3z^2$.
b) Probar que no existen números racionales no nulos a, b, r tales que $3(a^2+b^2) = 7r^2$.

(24) Cinco hombres recogieron en una isla un cierto número de cocos y resolvieron repartirlos al día siguiente. Durante la noche uno de ellos decidió separar una parte y para ello dividió el total en cinco partes y dio un coco que sobraba a un mono y se fue a dormir. En seguida otro de los hombres hizo lo mismo, dividiendo lo que había quedado por cinco, dando un coco que sobraba a un mono y retirando su parte, se fue a dormir. Uno tras otro los tres restantes hicieron lo mismo, dándole a un mono el coco que sobraba. A la mañana siguiente repartieron los cocos restantes, dándole a un mono el coco sobrante. ¿Cuál es el número mínimo de cocos que se recogieron?

(25) La producción diaria de huevos en una granja es inferior a 75. Cierto día el recolector informó que la cantidad de huevos recogida es tal que contando de a 3 sobran 2, contando de a 5 sobran 4 y contando de a 7 sobran 5. el capataz dijo que eso era imposible. ¿Quién tenía razón?