

ÁLGEBRA I / MATEMÁTICA DISCRETA I
PRACTICO 7 (2002)

1. Supongamos que hay 6 personas (Juan, María, Rosa, Esteban, Pablo y Sofronisa) que se pasan rumores los unos a los otros.

Cada día, Juan habla con María y Sofronisa, María habla con Juan, Rosa y Esteban, Rosa habla con María, Esteban y Pablo, Esteban habla con María, Rosa, Pablo y Sofronisa, Pablo habla con Rosa, Esteban y Sofronisa; y Sofronisa habla con Juan, Esteban y Pablo.

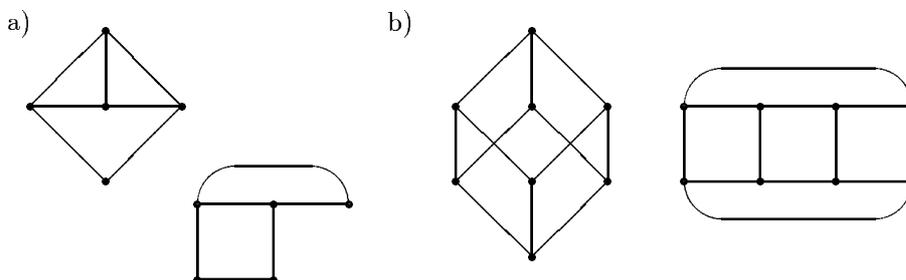
Cualquier cosa que alguien escucha un día, lo pasa al día siguiente a las personas con quienes habla.

- a) Modele esta situación con un grafo.
b) ¿Cuántos días tarda un rumor para ir desde Juan a Esteban? ¿Quién se lo contará a Esteban?
2. Para cada una de las siguientes secuencias, encuentre un grafo que tenga exactamente los grados indicados o demuestre que tal grafo no existe:

- | | |
|----------------------|-------------------|
| (a) 3, 3, 1, 1 | (d) 3, 2, 2, 1 |
| (b) 3, 3, 2, 2, 1, 1 | (e) 4, 1, 1, 1, 1 |
| (c) 7, 3, 3, 3, 2, 2 | (f) 4, 1, 1, 1 |

3. Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos y sea $\alpha : V \mapsto V'$ una función tal que $\delta(v) = \delta(\alpha(v)) \forall v \in V$.

- (i) ¿Puede afirmar que α es un isomorfismo?
(ii) ¿Puede afirmarlo si $|V| = 3$ ó 4 ?
4. Demuestre que los siguientes pares de grafos son isomorfos (exhiba un isomorfismo)



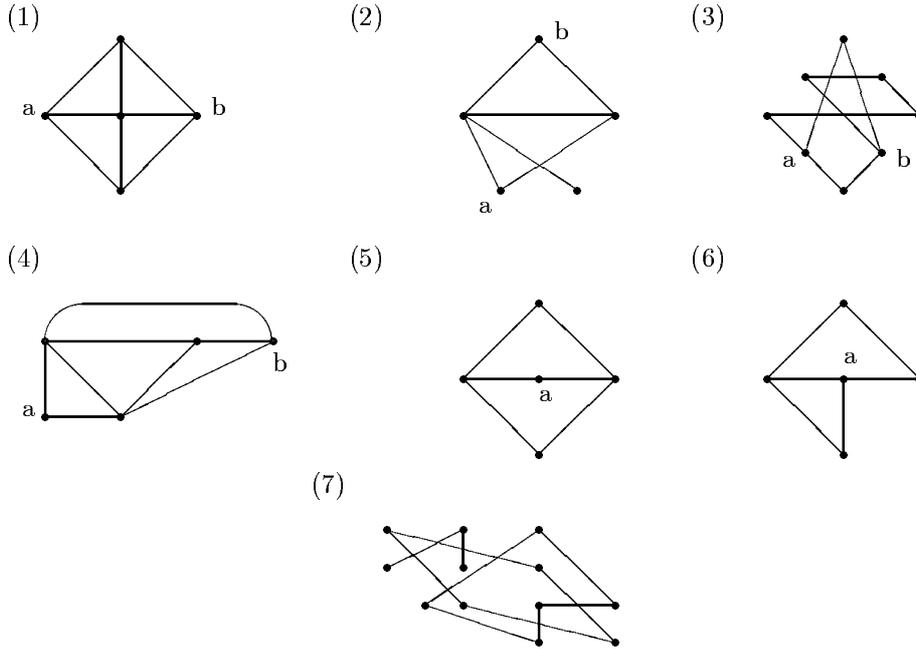
5. Encuentre dos funciones del grafo A al B que preserven grados. ¿Es un isomorfismo?



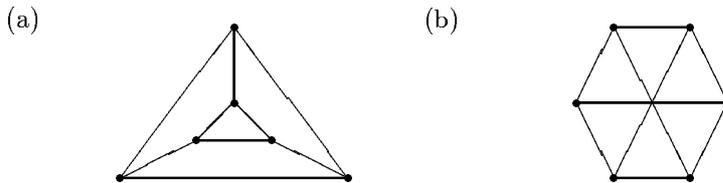
6. Pruebe que si G es un grafo con más de un vértice, entonces existen dos vértices con el mismo grado.

7. *Definición:* Sea $G = (V, E)$ un grafo. Se dice que $G' = (V', E')$ es subgrafo de $G = (V, E)$ si $V' \subset V$, $E' \subset E$ y todos los vértices que son extremos de las aristas de E' están en V' .

Dados los siguientes grafos:

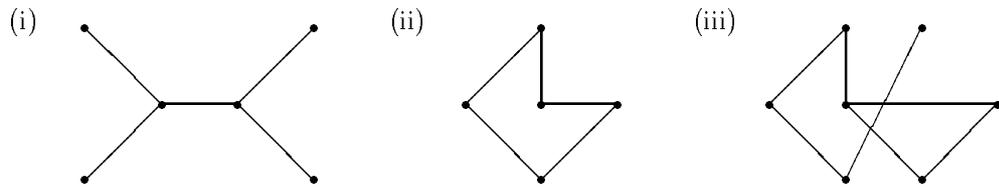


- (a) Determine en cada caso si existen subgrafos completos de más de 2 vértices.
- (b) Para el grafo (1), dé todos los caminos que unen a con b .
- (c) Dé caminatas eulerianas que unan a con b en los grafos (2), (3) y (4).
- (d) Para (5) y (6), decir si existen ciclos hamiltonianos partiendo de a .
- (e) Determinar cuáles de los siguientes pares de grafos son isomorfos:
 - (i) (4) y (2) (ii) (5) y (6) (iii) (5) y (1).
 - (f) Halle las componentes conexas del grafo (7).
- 8. Pruebe que si v, w son vértices de un grafo G y existe una caminata que une v con w , entonces existe un camino que une v con w .
- 9. Pruebe que los siguientes grafos no son isomorfos:



- 10. Dé todos los árboles de 6 vértices no isomorfos.
- 11. Sea $G = (V, E)$ un grafo con $|V| = n$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - (a) G es un árbol.
 - (b) G es conexo y, cualquiera sea $e \in E$, $G - \{e\}$ no es conexo.
 - (c) G es acíclico y si se le agrega una arista deja de serlo.
 - (d) G es acíclico y tiene $n - 1$ aristas.
 - (e) G es conexo y tiene $n - 1$ aristas.

- 12. Definición: Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un árbol generador de G es un subgrafo T de G que es árbol y que contiene todos los vértices de G .
 - (a) Encuentre todos los árboles generadores de los siguientes grafos.



(b) Para cada uno de los grafos anteriores, encuentre las aristas que están en todos los árboles generadores.

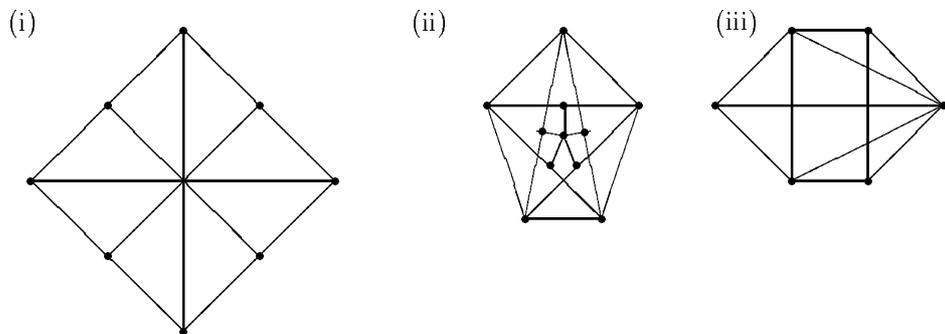
(c) Caracterice las aristas que están en todos los árboles generadores de un grafo conexo.

13. Encuentre una coloración de los siguientes grafos e indique si puede, el número cromático respectivo:

(a) K_n (grafo completo de n vértices).

(b) C_n (ciclo de n vértices).

(c)



14. Tiene el siguiente grafo un ciclo hamiltoniano?

